JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 1 (JUN 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF SALJU (Sn_m)

Cindy Aisa Putri Noor[1*], Lailany Yahya[2], Salmun K Nasib[3], Nisky I Yahya[4]

[1,2,3,4]*Universitas Negeri Gorontalo*
Email : [1]cindy.aisa2010@gmail.com, [3]salmun@ung.ac.id
[*]Penulis Korespondensi

Abstract. A graph is stated rainbow-connected if there is path between two vertices in which every edge has a distinct color. Supposing there is a graph G which is not trivial with definition of color $c: E(G) \to \{1,2,3, \ldots\}$, thus, the rainbow connection number from graph G is minimum k from rainbow k coloring used to color graph G and notated by $rc(G)$. The objective of this research was to determine the rainbow connection number at snow graph (Sn_m). The method used in research was literature study method with the following procedure; drawing snow graph, seeking pattern of rainbow connection number, and proving the theorem of rainbow connection number at snow graph (Sn_m). Therefore, it obtained $rc(Sn_m) = m + 1$ for $3 \leq m \leq 7 \wedge m = \{9,10\}$ and $rc(Sn_m) = m$ for $m = 8 \wedge m \geq 11$.
Keywords: Graph, Rainbow Connection Number, Snow Graph.

Abstrak. Suatu graf dikatakan terhubung pelangi jika terdapat lintasan antara dua titik yang setiap sisi-sisinya memiliki warna berbeda. Misalkan terdapat suatu graf G tak trivial dengan definisi warna $c: E(G) \to \{1,2,3, \ldots\}$, maka bilangan terhubung pelangi dari graf G yaitu minimum k dari pewarnaan-k pelangi yang digunakan untuk mewarnai graf G dan dinotasikan dengan $rc(G)$. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf salju (Sn_m). Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu metode studi literatur dengan prosedur sebagai berikut; menggambar graf salju, mencari pola bilangan terhubung pelangi, dan membuktikan teorema bilangan terhubung pelangi pada graf salju (Sn_m). Sehingga diperoleh $rc(Sn_m) = m + 1$ untuk $3 \leq m \leq 7 \ \wedge \ m = \{9,10\}$ dan $rc(Sn_m) = m$ untuk $m = 8 \wedge m \geq 11$.
Kata Kunci: Graf, Bilangan Terhubung Pelangi, Graf Salju.

I. PENDAHULUAN

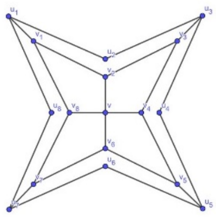
Graf pertama kali ditemukan saat memecahkan masalah jembatan konisberg yang dimodelkan kedalam bentuk graf [1]. Graf merupakan pasangan himpunan (V, E) atau gabungan dari sekumpulan objek yang terdiri dari titik dan sisi. Graf dinotasikan dengan $G = (V, E)$ [2]. Sebuah graf, himpunan dari titik $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong dan himpunan sisi $E(G)$ bisa merupakan himpunan kosong [3]. Graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan contohnya pada jaringan komunikasi [4]. Dalam teori graf terdapat suatu topik yaitu pelabelan yang terdiri dari pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Salah satu kasus khusus dari pelabelan adalah pewarnaan graf [5]. Ada beberapa jenis pewarnaan graf yaitu pewarnaan sisi, pewarnaan titik, dan pewarnaan wilayah [6]. Dan terdapat dua jenis pewarnaan pelangi yaitu pewarnaan-k pelangi dan pewarnaan-k pelangi kuat [7]. Pewarnaan-k pelangi dan pewarnaan-k pelangi kuat berkaitan dengan lintasan [8], jalan [9], dan jejak [10].

Minimum k dari pewarnaan-k pelangi pada sisi graf G disebut bilangan terhubung pelangi dan dinotasikan dengan $rc(G)$. Jika G merupakan graf terhubung tak trivial dengan diameter berupa jarak terbesar antara dua titik v_1 dan v_2 yang dinotasikan dengan $diam(G)$ dan memiliki sisi sebanyak m, maka $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ [7].

Sebelumnya sudah ada beberapa penelitian mengenai bilangan terhubung pelangi, yaitu bilangan terhubung pelangi pada graf gir, graf buku, dan graf $cycle - chain$ [11]. Bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung pelangi kuat pada graf kipas dan graf matahari [12]. Adapula bilangan terhubung pelangi graf bunga dan lemon [13] dan bilangan terhubung pelangi graf amalgamasi [14].

II. PEMBAHASAN

2.1 Definisi



Gambar 1. Graf Salju (Sn_4)

Graf salju merupakan gabungan dari graf gir dan graf sikel dengan penambahan sisi sebanyak m yang menghubungkan graf gir dengan graf sikel dan dinotasikan dengan Sn_m dengan bilangan bulat positif $m \geq 3$ seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Graf yang setiap titiknya berderajat dua disebut dengan graf sikel (C_n) [15]. Graf gir diperoleh dengan menambahkan titik di antara dua titik yang berdekatan di graf sikel yang berada pada graf roda [16]. Kemudian, gabungan dari graf G_1 dan G_2 adalah graf dengan gabungan titik dan gabungan sisi [17].

Dinamakan graf salju karena menyerupai kristal salju. Kristal salju bersifat simetris atau berpola karena mencerminkan tatanan molekul air pada saat kristalisasi [18]. Dapat dilihat pola kristal salju hampir mirip dengan pola bintang, akan tetapi memiliki pola yang berbeda dengan graf bintang. Graf yang terdiri dari satu titik berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik berderajat 1 disebut graf bintang [19]. Derajat suatu titik adalah jumlah sisi yang terhubung pada titik tersebut [20].

Graf salju dibentuk oleh himpunan titik dan sisi yang disimbolkan dengan $V(Sn_m)$ sebagai titik dan $E(Sn_m)$ sebagai sisi. Sehingga, graf salju didefinisikan sebagi berikut:

$$V(Sn_m) = \{v\} \cup \{v_i | i \in [1,2m]\} \cup \{u_i | i \in [1,2m]\}$$
$$E(Sn_m) = \{vv_i | i \in [1,2m], i\ genap\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1,2m], v_{2m+1} = v_1\} \cup \{u_i u_{I+1} | i \in [1,2m], u_{2m+1} = u_1\} \cup \{v_i u_i | i \in [1,2m], i\ ganjil\}$$

2.2 Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Salju (Sn_m)

Teorema 1 *Misalkan m merupakan bilangan bulat positif $m \geq 3$ dan Sn_m adalah graf salju, maka*

$$diam(Sn_m) = \begin{cases} m+1, & untuk\ 3 \leq m \leq 5 \\ m, & untuk\ m = 6 \wedge m = 7 \\ 8, & untuk\ m \geq 8 \end{cases}$$

$$rc(Sn_m) = \begin{cases} m+1, & untuk\ 3 \leq m \leq 5 \wedge m = 6 \wedge m = 7 \\ m, & untuk\ m = 8 \wedge m \geq 11 \end{cases}$$

Bukti: Diketahui $rc(G) \geq diam(G)$ [7]. Sehingga, untuk membuktikan Teorema 1, cukup memperlihatkan $rc(Sn_m) \geq diam(Sn_m)$.

Kasus 1. $rc(Sn_m) = m + 1$

Subkasus 1.1. $m = 3$

Karena $diam(Sn_4) = 4$, maka $rc(Sn_4) \geq 4$. Untuk itu didefinisikan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &c(u_5u_6) = c(v_6v_1) = 1 \\ &c(u_iv_i) = 4 \\ &c(vv_i) = c(u_iu_{i+1}) = \tfrac{i}{2},\ untuk\ i \in [1,2m], i\ genap \\ &c(u_iu_{i+1}) = \tfrac{i+3}{2},\ untuk\ i = 1,3 \\ &c(v_iv_{i+1}) = \tfrac{i+1}{2},\ untuk\ i\ ganjil \\ &c(v_iv_{i+1}) = \tfrac{i}{2} + 1,\ untuk\ i = 2,4 \end{aligned} \tag{1}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik x dan y di $V(Sn_3)$ yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan Pelangi dengan pewarnaan c. Lebih jelasnya, lintasan Pelangi pada setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_3)$ dengan kondisi $2m + 1 = 1$ dan $1 - 1 = 2m$ dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Lintasan Pelangi Sn_3

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	v	v_i	$i \in [1,2m] \mid i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i
2	v	u_i	$i \in [1,2m] \mid i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i, u_i
			$i \in [1,2m] \mid i\ genap$	$v, v_{i-2}, v_{i-1}, u_{i-1}, u_i$
3	v_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = 2 \mid i\ ganjil$	v_i, v_{i+1}, v_{i+2}
			$i \in [1,2m], j = \{2,3\} \mid i\ genap$	$v_i, v, \dots, v_{i+j}$
4	v_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j \in [1,3] \mid i\ ganjil$	$v_i, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \mid i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = 3 \mid i\ genap$	$v_i, v, v_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}$
5	u_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j = \{2,3\}$	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+j}$
6	u_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \mid i\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \mid i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}$

Subkasus 1.2. $m = 4$ dan $m = 5$

Pada subkasus ini, untuk nilai $m = 4$ dan $m = 5$ dibahas secara bersamaan karena definisi pewarnaannya sama. $Diam(Sn_m)$ untuk $m = 4$ dan $m = 5$ yaitu $m + 1$, maka $rc(Sn_m) \geq m + 1$. Untuk itu didefinisikan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots\}$ sebagai berikut:

$c(u_iu_{i+1} = c(v_iv_2) = m, \qquad i = \{2, m + 2\}$

$$c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = \{4, m+4\} \\ \dfrac{j+3}{2}, & j = \{3,1\}, i = \{j, m+j\} \\ 4, & i = \{5,10\}, m = 5 \end{cases}$$
$$c(v_iu_i) = m + 1$$
$$c(vv_i) = \frac{i}{2},\ i \in [1,2m] | i\ genap \tag{2}$$
$$c(v_iv_{v+1}) = \begin{cases} \dfrac{i+2}{2}, & i \in [2, m+1] | i\ genap \\ \dfrac{i-1}{2}, & i \in [2, m] | m\ ganjil \\ \dfrac{i+1}{i\ mod\ m}, & i \in [m+1, mm+2) | i\ ganjil \\ i - 3 - (5\ mod\ m), & i \in [m+2, m+3] | i\ genap \\ \dfrac{i-1}{2(11\ mod\ m)} + m\ mod\ 4, & i \in [m+3, m+4] | i\ ganjil \\ (i-1) mod\ 4, & i = 2m \end{cases}$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m = 4 \wedge m = 5$ yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan Pelangi dengan pewarnaan c. Lintasan Pelangi disetiap dua titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m = 4 \wedge m = 5$ dengan kondisi $2m + 1 = 1$ dan $1 - 1 = 2m$ dapat dilihat pada table 2.

Tabel 2. Lintasan Pelangi $Sn_4 \wedge Sn_5$

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan pelangi
1	v	v_i	$i \in [1,2m] \| i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i
2	v	u_i	$i \in [1,2m] \| i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i, u_i
			$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$v, v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_i$
3	v_i	v_j	$i, j \in [1,2m], i < j \| i, j\ genap$	v_i, v, v_j
4	v_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = [2,4] \| i\ ganjil$	v_i, v_{i+1}, v_{i+2}
			$i \in [1,2m], j \in [3,2m-3] \| i, j\ ganjil$	v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}
5	v_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], \in [1,m] \| i\ ganjil$	$v_i, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+j}$
			$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}$
6	v_i	u_i	$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$v_i, v_{i-1}, u_{i-1}, u_i$
7	u_i	u_{i+j}	$i \in [1,m], j \in [1,m]$	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+j}$
8	u_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = [1,4] \| i\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = 5, m = 5 \| i, j\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j = 6, m = 5 \| i\ ganjil, j\ genap$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j \in [1,3] i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j \in [4,2m-4] \| i, j\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v, v_{i+j}$

Subkasus 1.3. $m = 6$ dan $m = 7$

$Diam(Sn_m)$ untuk $m = 6 \wedge m = 7$ adalah m, maka $rc(Sn_m) \geq m$. Akan ditunjukkan $rc(Sn_m) \geq diam + 1$ untuk $m = 6 \wedge m = 7$. Andaikan $rc(Sn_m) \leq diam = m$, maka terdapat pewarnaan-m pelangi yang didefinisikan dengan $c': E(G) \to \{1,2, \dots, m\}$ pada Sn_m untuk $m = 6 \wedge m = 7$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan:

$$c'(u_iu_{i+1}) = i - 1, \qquad i \in [2, m+1]$$

Perhatikan sisi u_iu_{i+1} untuk $i \in [m+2, 2m]$ hanya dapat diberi warna $i - m$. Andaikan u_iu_{i+1} untuk $i \in [m+2, 2m]$ diberi warna selain warna $i - m$, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, u_{i+1}, u_{i+3}, \dots, u_m$ untuk $i \in [1,2m]$. Selanjutnya perhatikan sisi u_1u_2 hanya dapat diberi warna m. Seandainya u_1u_2 diberi warna selain m, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_1, u_2, \dots, u_m$. Dimisalkan sisi u_iv_i diberi warna $i+1$ untuk $i = 1,3$, warna 1 untuk $i = \{5,2m-1\}$, dan warna $(i \bmod m) + 1$ untuk $i \in [m, 2m-3]|i$ ganjil. Seandainya sisi u_iv_i untuk $i \in [1,2m-1]|i$ ganjil diberi warna lain makan akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $v_i, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$ dan $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, v_{i+2}$ untuk $i \in [1,2m-1]|2m+1 = 1, i$ ganjil. Selanjutnya, sisi v_iv_{i+1} untuk $i \in [1,2m-1]|i$ ganjil hanya dapat diberi warna i untuk $i \in [1,m]|i$ ganjil dan $i \bmod m$ untuk $i \in [m+1,2m-1]|i$ ganjil. Jika sisi v_iv_{i+1} untuk $i \in [1,2m-1]|i$ ganjil diberi warna lain, maka akan terdapat beberapa lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}$ untuk $i \in [1,2m-1]|2m+1 = 1, i$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m-1]|2m+1 = 1, i$ ganjil, dan lintasan $u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i$ untuk $i \in [2,2m]|i$ genap. Selanjutnya, sisi v_iv_{i+1} untuk $i \in [2,2m]|i$ genap hanya dapat diberi warna $i-2$ untuk $i \in [4,8]|i$ genap, warna $(i \bmod m) - 2$ untuk $i \in [10,2m-2]|i$ genap, warna m untuk v_2v_3, dan warna $7m-2$ untuk $v_{2m}v_1$. Jika sisi v_iv_{i+1} untuk $i \in [2,2m]|i$ genap diberi warna lain, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}$ untuk $i \in [1,2m-1]|2m+1 = 1, i$ ganjil dan lintasan $v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}$ untuk $i \in [2,2m]|2m+1 = 1, i$ genap.

Untuk $m = 6$, perhatikan sisi vv_2 hanya dapat diberi warna 5. Jika sisi vv_2 diberi warna lain maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu u_2, u_1, v_1, v_2, v, lintasan v_2, v, v_6, v_7, lintasan v_2, v, v_{10}, v_9. Selanjutnya, perhatikan sisi vv_6 hanya dapat diberi warna 3. Jika sisi vv_6 diberi warna lain, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu $u_2, u_1, v_1, v_2, v, v_6, v_7$. Selanjutnya, perhatikan sisi vv_8 hanya dapat diberi warna 3. Jika sisi vv_8 diberi warna lain, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu $u_2, u_1, v_1, v_2, v, v_8$, lintasan u_3, v_3, v_2, v, v_8. Selanjutnya, perhatikan sisi vv_{10} tidak dapat diberi warna c'. Jika sisi vv_{10} diberi warna 1,2,5, dan 6, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu $u_2, u_1, v_1, v_2, v, v_{10}$. Jika sisi vv_{10} diberi warna 4, maka akan terdapat lintasan pelangi yaitu u_3, v_3, v_2, v, v_{10}. Jika sisi vv_{10} diberi warna 3, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu v_6, v, v_{10}. Jadi, graf salju untuk $m = 6$ bukan merupakan pewarnaan-m pelangi.

Untuk $m = 7$, perhatikan vv_i untuk $i \in [2,14]|i$ genap tidak bisa diwarnai dengan warna yang sama dengan warna pada sisi $u_{i+j}v_{i+j}$ untuk $i \in [2,14], j \in [5,9]|2m+1 = 1, i$ genap dan j ganjil. Jika diberi warna yang sama maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu $v_i, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}, u_{i+j}$ untuk $i \in [2,14], j \in [5,9]|2m+1 = 1, i$ genap dan j ganjil. Selanjutnya, sisi vv_i untuk $i \in [2,14]|i$ genap juga tidak bisa diwarnai dengan warna pada sisi $v_{i+3}v_{i+4}$ untuk $i \in [2,14]|2m+1 = 1, i$ genap dan warna pada sisi $u_{i+9}u_{i+10}$ untuk $i \in [2,14]|2m+1 = 1, i$ genap. Jika diberi warna yang sama maka akan terdapat lintasan yang tidak pelamgi yaitu $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}, v_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m]|2m+1 = 1, i$ ganjil. Selanjutnya, sisi vv_i dan vv_{i+4} untuk $i \in [2,14]|2m+1 = 1, i$ genap tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama pada sisi $u_{i-2}u_{i-1}$ dan $u_{i-1}v_{i-1}$ untuk $i \in [2,14]|2m+1 = 1, i$ genap. Jika diwarnai dengan warna yang sama maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu $u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v, v_{i+6}, v_{i+5}$. Selanjutnya, perhatikan sisi vv_{10} tidak dapat lagi diwarnai dengan c'. Sehingga graf salju (Sn_m) untuk $m = 7$ bukan merupakan pewarnaan-m pelangi.

Karena graf salju (Sn_m) untuk $m = 6 \wedge m = 7$ bukan merupakan pewarnaan-m pelangi, maka diperoleh $rc(Sn_m) \geq m+1$ untuk $m = 6 \wedge m = 7$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Sn_m) \leq m+1$ untuk $m = 6 \wedge m = 7$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, m+1\}$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&c(vv_2) = c(vv_{2m}) = 2\\
&c(vv_8) = c(vv_{10}) = 4\\
&c(v_{2m}v_1) = 7m-2\\
&c(u_1u_2) = c(v_2v_3) = c(vv_4) = c(vv_6) = m\\
&c(v_iu_i) = m+1,\ i \in [1,2m] | i\ ganjil \qquad (3)\\
&c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} i-1, & i \in [2, m+1] \\ i-m+1, & i \in [m+2, 2m] \end{cases}\\
&c(vv_{12}) = 5,\ m = 7\\
&c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} i, & i \in [1, m] | i\ ganjil \\ i \bmod m, & i \in [m+1, 2m-1] | i\ ganjil \\ i-2, & i \in [4,8] | i\ genap \\ (i \bmod m) - 2, & i \in [10, 2m-2] | i\ genap \end{cases}
\end{aligned}
$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m = 6 \wedge m = 7$ yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c. Lintasan pelangi disetiap dua titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m = 6 \wedge m = 7$ dengan kondisi $2m + 1 = 1$ dan $1 - 1 = 2m$ dapat dilihat pada tabel 3.

Tabel 3. Lintasan Pelangi Sn_6 dan Sn_7

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	v_i	v	$i \in [1,2m] \| i\ ganjil$	v_i, v_{i+1}, v
2	u_i	v	$i \in [1,2m] \| i\ ganjil$	u_i, v_i, v_{i+1}, v
			$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i, v$
3	v_i	v_j	$i, j \in [1,2m] \| i, j\ genap,$ $i + 2 \leq j \leq 2m$	v_i, v, v_j
4	v_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = \{2,3\}$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j \in [5, 2m-5] \|$ $i, j\ ganjil$	v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}
			$i = \{1,5\}, j = 6, m = 6$	$v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}, v_{i+6}$
			$i = 3, j = 6, m = 6$	$v_i, v_{i-1}, v, v_{i+7}, v_{i+6}$
			$i \in [1,2m], j = 4 \| i\ ganjil$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$
			$i \in [1,2m], j \in [6, 2m-6],$ $m = 7 \| i\ ganjil, j\ genap$	$v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
5	v_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j = 1 \| i\ ganjil$	v_i, u_i, u_{i+1}
			$i \in [1,2m], j = \{2,3\} \| i\ ganjil$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, u_{i+2}, u_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j = 5 \| i\ ganjil$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}, u_{i+5}$
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = \{3,4\} \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}, u_{i+4}$
6	u_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j \in [1, m]$	$u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i+j}$
7	u_i	v_i	$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i$
8	u_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j \in [1,4] \| i\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+4}$
			$i \in [1,2m], j \in [1,5] \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_{i+5}$
			$i \in [1,2m], j \in [5, 2m-5] \|$ $i, j\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j \in [6, 2m-6] \|$ $i, j\ genap$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i, v, v_{i+j}$
			$i = \{1,5,9\}, j = m = 6$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}, v_{i+6}$
			$i = \{3,7,11\}, j = m = 6$	$u_i, v_i, v_{i-1}, v, v_{i+7}, v_{i+6}$

$i \in [1,2m], j \in [6,2m-6],$ $m = 7 \vert i\ ganjil, j\ genap$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
$i \in [1,2m], j = m = 7 \vert i\ genap$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$

Subkasus 1.4. $m = 9$

Untuk $m = 9$ memiliki $diam(Sn_9) = 8$, maka $rc(Sn_9) \geq 8$. Akan ditunjukkan $rc(Sn_9) \geq m + 1$. Diasumsikan $rc(Sn_9) \leq m$, maka terdapat pewarnaan-m pelangi pada graf salju (Sn_9) dengan definisi warna $c': E(G) \to \{1,2,\ldots,m\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan

$$c'(vv_i) = c'(vv_{i+1}) = \left\lfloor \frac{i+1}{4} \right\rfloor + 1, \qquad i = \{2,6,10,14,18\}.$$

Perhatikan sisi $v_i v_{i+1}$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama pada sisi vv_{i+1} dan vv_{i+j} untuk $j \in [5,2m-5], 2m+1 = 1|j$ ganjil dan sisi $v_{i+j}v_{i+j+1}$ untuk $j = 2 \wedge j \in [6,2m-6], 2m+1 = 1|j$ genap. Jika diberi warna yang sama, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j} untuk $i \in [1,2m], j \in [5,2m-5], 2m+1 = 1|i,j$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [6,2m-6]|i$ ganjil dan j genap dengan kondisi $2m+1 = 1$ dan lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil dengan kondisi $2m+1 = 1$. Sehingga sisi v_3v_4 diberi warna 5 dan sisi v_iv_{i+1} untuk $i = \{5,9,13,17\}$ diberi warna $\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$, untuk $i = \{7,11\}$ diberi warna 6, dan untuk $i = \{1,15\}$ diberi warna 7. Selanjutnya perhatikan sisi u_iv_i untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil tidak dapat diberi warna yang sama dengan warna pada sisi v_iv_{i+1}, sisi $v_{i+j}v_{i+j+1}$ untuk $j = 2 \wedge j \in [6,2m-2], j$ genap, sisi vv_{i+j} untuk $j = 1 \wedge j \in [5,2m-5], j$ ganjil, dan $u_{i+j}v_{i+j}$ untuk $j \in [8,2m-8]$ dengan kondisi $2m+1 = 1$. Jika diberi warna yang sama akan terdapat beberapa lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m], 2m+1 = 1|i$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m], 2m+1 = 1|i$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [5,2m-5], 2m+1 = 1|i,j$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [6,2m-6], 2m+1 = 1|i$ ganjil dan j genap, dan lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}, u_{i+j}$ untuk $j \in [8,2m-8]$ dengan kondisi $2m+1 = 1$. Sehingga, sisi u_iv_i untuk $i = \{1,3,5,7\}$ diberi warna 8, untuk $i = \{9,11,13,15\}$ diberi warna 9, dan untuk $i = 17$ tidak dapat lagi diberi warna c'.

Karena $u_{17}v_{17}$ tidak dapat lagi diberi warna c', maka graf salju (Sn_9) bukan merupakan pewarnaan-m pelangi dan diperoleh $rc(Sn_9) \geq m + 1$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Sn_9) \leq m + 1$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \to \{1,2,\ldots,m+1\}$ dapat dilihat pada persamaan (4).

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_9)$ yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c. Lintasan pelangi disetiap dua titik $x, y \in V(Sn_9)$ dengan kondisi $2m+1 = 1 \wedge 1-1 = 2m$ dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4. Lintasan Pelangi Sn_m untuk $m \geq 9|m\ ganjil$

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan pelangi
1	v_i	v	$i \in [1,2m] \vert i\ ganjil$	v_i, v_{i-1}, v
2	v	u_i	$i \in [1,2m] \vert i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i, u_i
			$i \in [1,2m] \vert i\ genap$	$v, v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_i$
3	v_i	v_j	$i, j \in [1,2m], i < j \vert$ $i, j\ genap$	v_i, v, v_j
4	v_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j \in [2,4]$	$v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+j}$
				v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j}

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 1 (JUN 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

			$i = 4n - 1, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right],$ $j \in [5,2m-5] \| j\ ganjil$	
			$i = 4n - 3, n \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right],$ $j \in [7,2m-5] \| j\ ganjil$	$v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
			$i = 4n - 1, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right],$ $j \in [6,2m-6] \| j\ genap$	
			$i = 4n - 3, n \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right],$ $j \in [8,2m-6] \| j\ genap$	$v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}, v_{i+6}$
			$i = 4n - 3, n \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right], j = \{5,6\}$	
5	v_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j = 1 \| i\ ganjil$	v_i, u_i, u_{i+1}
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = \{2,3\} \| i\ ganjil$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, u_{i+2}, u_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j = 3 \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}$
6	u_i	v_j	$i, j \in [1,2m], i = j \| i, j\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{j+1}, v_j$
			$i = 2m - 4, j = 3$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_{i-2}, v, v_{j+1}, v_j$
			$i = 2m, j = \{5,7\}$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_{i-2}, v, v_{j-1}, v_j$
			$i = 2m - 4, j \in [5,2m-11] \| j\ ganjil$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v, v_{j-1}, v_j$
			$i = 2m - 4, j = 2m - 9$	$u_i, u_{i-1}, v_{i-1}, v_{i-2}, v, v_{j+1} v_j$
7	u_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = 1 \| i\ ganjil$	u_i, v_i, v_{i+1}
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = \{2,3\} \| i\ ganjil$	$u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j = 3 \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3} v_{i+3}$
			$i = 4n - 1, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right],$ $j \in [5,2m-5] \| j\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j}$
			$i = 4n - 3, n \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right],$ $j \in [7,2m-5] \| j\ ganjil$	
			$i = 4n - 3, n \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right], j = 5$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}$
			$i \in [1,2m], j = 4 \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, v_{i+3}, v_{i+4}$
			$i = 4n - 2, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right],$ $j \in [6,2m-4] \| j\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v, v_{i+j}$
			$i = 4n, n \in [\left[1, \frac{m-1}{2}\right] \wedge$ $n = \frac{m}{2}, j \in [8,2m-4] \| j\ genap$	
			$i \in [1,2m], j = \{4,6,2m-4\} \| i\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j \in [8,2m-6] \|$ $i\ ganjil, j\ genap$	$u_i, v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$

			$i = 4n, n \in \left[1, \frac{m-1}{2} - 1\right] \wedge n = \frac{m}{2}$, $j = 6$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v, v_{i+6}$
			$i = 4n - 2, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right], j = 5$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v, v_{i+6}, v_{i+5}$
			$i = 4n - 2, n \in \left[1, \frac{m-1}{2} - 1\right]$, $j \in [7,2m-5] \| j\ ganjil$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
			$i = 4n, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right], j = \{5,7\}$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v,$ v_{i+j+1}, v_{i+j}
			$i = 4n, n \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right] \wedge n = \frac{m}{2}$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v,$ v_{i+j-1}, v_{i+j}
8	u_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j \in [2,8]$	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j \in [8,2m-8]$, $i + j \leq 2m - 1 \| i\ ganjil, j\ genap$	$u_i, v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j-1},$ v_{i+j}, u_{i+j}
			$i \in [1,2m], j \in [9,2m-9] \|$ $i\ genap, j\ ganjil$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i, v,$ $v_{i+j-1}, v_{i+j}, u_{i+j}$
			$i \in [1,2m], j \in [10,2m-10] \| i,j\ genap$	$u_i, u_{i+1} v_{i+1}, v_i, v, v_{i+j},$ $v_{i+j+1}, u_{i+j+1}, u_{i+j}$

Subkasus 1.5. $m = 10$

Untuk $m = 10$ memiliki $diam(Sn_{10}) = 8$, maka $rc(Sn_{10}) \geq 8$. Akan ditunjukkan $rc(Sn_{10}) \geq m + 1$. Diasumsikan $rc(Sn_{10}) \leq m$, maka terdapat pewarnaan-m pelangi pada graf salju (Sn_{10}) dengan definisi warna $c': E(G) \to \{1,2, \dots, m\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan

$$c'(vv_i) = c'(vv_{i+1}) = \left\lfloor \frac{i+1}{4} \right\rfloor + 1, \qquad i = \{2,6,10,14,18\}.$$

Perhatikan sisi $v_i v_{i+1}$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama pada sisi vv_{i+1} dan vv_{i+j} untuk $j \in [5,2m-5], 2m+1 = 1 | j$ ganjil, sisi $v_{i+j}v_{i+j+1}$ untuk $j = 2 \wedge j \in [6,2m-6], 2m+1 = 1 | j$ genap. Jika diberi warna yang sama, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j} untuk $i \in [1,2m], j \in [5,2m-5], 2m+1 = 1 | i,j$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [6,2m-6] | i$ ganjil dan j genap dengan kondisi $2m+1 = 1$, dan lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil dengan kondisi $2m+1 = 1$. Sehingga sisi v_1v_2 diberi warna 5 dan sisi v_iv_{i+1} untuk $i = \{5,9,13,17\}$ diberi warna $\lceil i/5 \rceil$, untuk $i = \{3,7\}$ diberi warna 6, untuk $i = \{11,15\}$ diberi warna 7, dan untuk $i = 19$ diberi warna 8. Selanjutnya perhatikan sisi u_iv_i untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil tidak dapat diberi warna yang sama dengan warna pada sisi v_iv_{i+1}, sisi $v_{i+j}v_{i+j+1}$ untuk $j = 2 \wedge j \in [6,2m-2], j$ genap, sisi vv_{i+j} untuk $j = 1 \wedge j \in [5,2m-5], j$ ganjil, dan $u_{i+j}v_{i+j}$ untuk $j \in [8,2m-8]$ dengan kondisi $2m+1 = 1$. Jika diberi warna yang sama akan terdapat beberapa lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m], 2m+1 = 1 | i$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}v_{i+4}, u_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m], 2m+1 = 1 | i$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [5,2m-5], 2m+1 = 1 | i,j$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [6,2m-6], 2m+1 = 1 | i$ ganjil dan j genap, dan lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}, u_{i+j}$ untuk $j \in [8,2m-8]$ dengan kondisi $2m+1 = 1$. Sehingga, sisi u_iv_i untuk $i = 15$ diberi warna 8, untuk $i = \{1,3,5,19\}$ diberi warna 9, untuk $i = \{7,9,11,13\}$ diberi warna 10, dan untuk $i = 17$ tidak dapat lagi diberi warna c'.

Karena $u_{17}v_{17}$ tidak dapat lagi diberi warna c', maka graf salju (Sn_{10}) bukan merupakan pewarnaan-m pelangi dan diperoleh $rc(Sn_{10}) \geq m+1$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Sn_{10}) \leq m+1$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \to \{1,2,\dots,m+1\}$ dan persamaannya dapat dilihat pada persamaan (5)

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_{10})$ yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c. Lintasan pelangi disetiap dua titik $x, y \in V(Sn_{10})$ dengan kondisi $2m+1 = 1 \wedge 1-1 = 2m$ dapat dilihat pada tabel 5.

Tabel 5. Lintasan Pelangi Sn_m untuk $m \geq 8 | m\ genap$

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	v	v_i	$i \in [1,2m] \| i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i
2	v	u_i	$i \in [1,2m] \| i\ ganjil$	v, v_{i-1}, v_i, u_i
			$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$v, v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_i$
3	v_i	v_j	$i, j \in [1,2m], i \leq j \| i, j\ genap$	v_i, v, v_j
4	v_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j \in [2,4]$	$v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+4}$
			$i = 4n-1, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j \in [5, 2m-5] \| j\ ganjil$	v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j}
			$i = 4n-3, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j \in [7, 2m-5] \| j\ ganjil$	
			$i = 4n-1, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j \in [6, 2m-8] \| j\ genap$	$v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
			$i = 4n-3, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j \in [8, 2m-6] \| j\ genap$	
			$i = 4n-1, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j = 2m-6$	$v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j-1}, v_{i+j}$
			$i = 4n-3, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j = \{5,6\}$	$v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}, v_{i+6}$
5	v_i	u_{i+j}	$i \in [1,2m], j = 1 \| i\ ganjil$	v_i, u_i, u_{i+1}
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = \{2,3\} \| i\ ganjil$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, u_{i+2}, u_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j = 3 \| i\ genap$	$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, u_{i+3}$
6	u_i	v_i	$i \in [1,2m] \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_i$
7	u_i	v_{i+j}	$i \in [1,2m], j = 1 \| i\ ganjil$	u_i, v_i, v_{i+1}
			$i \in [1,2m], j = \{1,2\} \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}$
			$i \in [1,2m], j = \{2,3\} \| i\ ganjil$	$u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}$
			$i \in [1,2m], j = 3 \| i\ genap$	$u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, v_{i+3}$
			$i = 4n-1, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j \in [5, 2m-5] \| j\ ganjil$	$u_i, v_i, v_{i-1}, v, v_{i+j}$
			$i = 4n-3, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j \in [7, 2m-5] \| j\ ganjil$	
			$i = 4n-3, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j = 5$	$u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+5}$
			$i = 4n-2, n \in \left[1, \frac{m}{2}\right], j = 4$	$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 1 (JUN 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

			$i=4n-2, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j\in[6,2m-4] \mid j\ genap$ $i=4n, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j\in[8,2m-4] \mid j\ genap$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_i,v,v_{i+j}$
			$i=4n, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=\{4,6\}$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},v,v_{i+j}$
			$i=4n-1, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=4$	$u_i,v_i,v_{i-1},v,v_{i+5},v_{i+4}$
			$i=4n-1, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j\in[6,2m-8] \mid j\ genap$ $i=4n-3, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j\in[8,2m-6] \mid j\ genap$	$u_i,v_i,v_{i-1},v,v_{i+j-1},v_{i+j}$
			$i=4n-1, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=2m-6$	$u_i,v_i,v_{i-1},v,v_{i+j+1},v_{i+j}$
			$i=4n-1, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=2m-4$	$u_i,v_i,v_{i-1},v,v_{j-1},v_j$
			$i=4n-3, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=\{4,6\}$	$u_i,v_i,v_{i+1},v,v_{i+j-1},v_{i+j}$
			$i=4n-3, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=2m-4$	$u_i,v_i,v_{i-1},v,v_{i+j+1},v_{i+j}$
			$i=4n-2, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=5$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_i,v,$ v_{i+6},v_{i+5}
			$i=4n-2, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=2m-5$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_i,v,$ v_{i+j+1},v_{i+j}
			$i=4n-2, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j\in[7,2m-7] \mid j\ ganjil$ $i=4n, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j\in[9,2m-5] \mid j\ ganjil$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_i,v,$ v_{i+j-1},v_{i+j}
			$i=4n, n\in\left[1,\frac{m}{2}\right], j=\{5,7\}$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},v,$ v_{i+j-1},v_{i+j}
8	u_i	u_{i+j}	$i\in[1,2m], j\in[2,7]$	$u_i,u_{i+1},\dots,u_{i+7}$
			$i\in[1,2m], j\in[8,2m-8] \mid$ $i\ ganjil, j\ genap$	$u_i,v_i,v_{i-1},v,v_{i+j-1},v_{i+j}$
			$i\in[1,2m], j\in[9,2m-9] \mid$ $i\ genap, j\ ganjil$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_i,v,v_{i+j-1},$ v_{i+j},u_{i+j}
			$i\in[1,2m], j\in[8,2m-8] \mid i,j\ genap$	$u_i,u_{i+1},v_{i+1},v_i,v,v_{i+j},$ $v_{i+j+1},u_{i+j+1},u_{i+j}$

Kasus 2. $rc(Sn_m)=m$

Subkasus 2.1. $m=8$

Karena $diam(Sn_8)=8$, maka $rc(Sn_8)\geq 8$. Untuk itu, didefinisikan pewarnaan $c: E(G)\rightarrow\{1,2,\dots,8\}$ dan persamaannya dapat dilihat pada persamaan (5). Akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x,y\in V(Sn_8)$ yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c. Lintasan pelangi pada setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_8)$ dengan kondisi $2m+1=1 \wedge 1-1=2m$ dapat dilihat pada table 5.

Subkasus 2.2. $m \geq 11$ untuk m *ganjil*

Untuk $m \geq 11, m$ ganjil memiliki $diam(Sn_m)=8$, maka $rc(Sn_m) \geq 8$. Akan ditunjukkan $rc(Sn_m) \geq m$ untuk $m \geq 11$ dan m ganjil. Diasumsikan $rc(Sn_m) \leq m-1$, maka terdapat pewarnaan-$(m-1)$ pelangi pada graf salju (Sn_m) untuk $m \geq 11, m$ ganjil dengan definisi warna $c': E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, m-1\}$.

$$c'(vv_i) = c'(vv_{i+1}) = \left\lfloor \frac{(i+1)}{4} \right\rfloor + 1, \qquad i \in [2,2m], i=4n-2, n=\{1,2, \ldots\}.$$

Perhatikan sisi $v_i v_{i+1}$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama pada sisi vv_{i+1} dan vv_{i+j} untuk $j \in [5,2m-5], 2m+1=1 | j$ ganjil dan sisi $v_{i+j} v_{i+j+1}$ untuk $j=2$ dan $j \in [6,2m-6], 2m+1=1 | j$ genap. Jika diberi warna yang sama, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j} untuk $i \in [1,2m], j \in [5,2m-5], 2m+1=1 | i, j$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [6,2m-6] | i$ ganjil dan j genap dengan kondisi $2m+1=1$, dan lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil dengan kondisi $2m+1=1$. Sehingga sisi $v_i v_{i+1}$ untuk $i \in [1,2m-1], i=4n-3, n=\{1,2, \ldots\}$ diberi warna $\left\lfloor \frac{i-2}{4} \right\rfloor + 1$ dan i lainnya diberi warna $c' \in \left[\left\lfloor \frac{2m+1}{4} \right\rfloor + 1, \left\lceil \frac{2m-\frac{m+1}{2}}{2} \right\rceil\right]$ untuk $m=4n+7, n=\{1,2, \ldots\}$, diberi warna $c' \in \left[\left\lfloor \frac{2m+1}{4} \right\rfloor + 1, \left\lceil \frac{2m-\frac{m+1}{2}}{2} \right\rceil\right]$ untuk $m=4n+9, n=\{1,2, \ldots\}$. Selanjutnya perhatikan sisi $u_i v_i$ untuk $i \in [1,2m], i$ ganjil tidak dapat diberi warna yang sama dengan warna pada sisi $v_i v_{i+1}$, sisi $v_{i+j} v_{i+j+1}$ untuk $j=2$ dan $j \in [6,2m-2], j$ genap, sisi vv_{i+j} untuk $j=1$ dan $j \in [5,2m-5], j$ ganjil, dan sisi $u_{i+j} v_{i+j}$ untuk $j \in [8,2m-8]$ dengan kondisi $2m+1=1$. Jika diberi warna yang sama akan terdapat beberapa lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m], 2m+1=1 | i$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}$ untuk $i \in [1,2m], 2m+1=1 | i$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [5,2m-5], 2m+1=1 | i, j$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1,2m], j \in [6,2m-6], 2m+1=1 | i$ ganjil dan j genap, dan lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}, u_{i+j}$ untuk $j \in [8,2m-8]$ dengan kondisi $2m+1=1$. Sehingga, sisi $u_i v_i$ diberi warna \$$c' \in \left[\left\lceil \frac{2m-\frac{m+1}{2}}{2} \right\rceil + 1, m-1\right]$ untuk $i \in [1,2m-7], i$ ganjil pada $m=4n+7, n=\{1,2, \ldots\}$ dan diberi warna $c' \in \left[\left\lceil \frac{2m-\frac{m+1}{2}}{2} \right\rceil, m-1\right]$ untuk $i \in [1,11] \wedge i=2m-1, i$ ganjil pada $m=4n+9, n=\{1,2, \ldots\}$, dan untuk i lainnya tidak dapat lagi diberi warna c'. Sehingga, pada graf salju (Sn_m) untuk $m \geq 11$ dan m ganjil bukan merupakan pewarnaan-$(m-1)$ pelangi.

Karena graf salju (Sn_m) untuk $m \geq 11, m$ ganjil bukan merupakan pewarnaan-$(m-1)$ pelangi, maka diperoleh $rc(Sn_m) \geq m$ untuk $m \geq 11, m$ ganjil. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Sn_m) \leq m$ untuk $m \geq 11, m$ ganjil dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, m\}$ sebagai berikut:

$$c(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} i \bmod m, & i \in [1, m-1] \wedge i \in [m+1, 2m-1] \\ m, & i=m \wedge i=2m \end{cases}$$

$c(vv_2) = m$

$$c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} i \bmod m, \; i \in [1, m-1] \wedge i \in [m+1, 2m] | i\ ganjil \\ m, \; i = m \wedge i = 2m-2 \\ ((i+2) \bmod m), \; i \in [1, 2m-3] \wedge i = 2m | i\ genap \end{cases} \tag{4}$$

$c(vv_i) = c(vv_{i+2}) = (i-2) \bmod m, \; i = 4n, i \in [4, 2m], n = \{1, 2, \ldots\}$

$c(v_iu_i) = c(v_{i+2}u_{i+2}) = \begin{cases} (i+5) \bmod m, \; i = 4n-1, i \in [3, 2m-5], n = \{1, 2, \ldots\} \\ 4, \; i = 2m-1 \end{cases}$

$c(u_iv_i) = \begin{cases} 4, \; i = 2m-3, m \geq 11 | m\ ganjil \\ 10, \; i = 2m-3, m = 9 \end{cases}$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m \geq 11, m$ ganjil yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c. Lintasan pelangi disetiap dua titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m \geq 11, m$ ganjil dengan kondisi $2m+1 = 1$ dan $1 - 1 = 2m$ dapat dilihat pada tabel 4.

Subkasus 2.3. $m \geq 12$ untuk m genap

Untuk $m \geq 12, m$ genap memiliki $diam(Sn_m) = 8$, maka $rc(Sn_m) \geq 8$. Akan ditunjukkan $rc(Sn_m) \geq m$ untuk $m \geq 12$ dan m genap. Diasumsikan $rc(Sn_m) \leq m-1$, maka terdapat pewarnaan-$(m-1)$ pelangi pada graf salju (Sn_m) untuk $m \geq 12, m$ genap dengan definisi warna $c': E(G) \to \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

$$c'(vv_i) = c'(vv_{i+1}) = \left\lfloor \frac{(i+1)}{4} \right\rfloor + 1, \qquad i \in [2, 2m], i = 4n-2, n = \{1, 2, \ldots\}.$$

Perhatikan sisi v_iv_{i+1} untuk $i \in [1, 2m], i$ ganjil tidak dapat diwarnai dengan warna yang sama pada sisi vv_{i+1} dan vv_{i+j} untuk $j \in [5, 2m-5], 2m+1 = 1 | j$ ganjil dan sisi $v_{i+j}v_{i+j+1}$ untuk $j = 2$ dan $j \in [6, 2m-6], 2m+1 = 1 | j$ genap. Jika diberi warna yang sama, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j} untuk $i \in [1, 2m], j \in [5, 2m-5], 2m+1 = 1 | i, j$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1, 2m], j \in [6, 2m-6] | i$ ganjil dan j genap dengan kondisi $2m+1 = 1$ dan lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$ untuk $i \in [1, 2m], i$ ganjil dengan kondisi $2m+1 = 1$. Sehingga sisi v_iv_{i+1} untuk $i \in [1, 2m-1], i = 4n-3$ dengan $n = \{1, 2, \ldots\}$ diberi warna $\lfloor \frac{i-2}{4} \rfloor + 1$ dan i lainnya diberi warna $c' \in [\lfloor \frac{2m+1}{4} \rfloor + 2, \lfloor \frac{2m - \frac{m}{2}}{2} \rfloor]$ untuk $m \geq 12, m$ genap. Selanjutnya perhatikan sisi u_iv_i untuk $i \in [1, 2m], i$ ganjil tidak dapat diberi warna yang sama dengan warna pada sisi v_iv_{i+1}, sisi $v_{i+j}v_{i+j+1}$ untuk $j = 2$ dan $j \in [6, 2m-2], j$ genap, sisi vv_{i+j} untuk $j = 1$ dan $j \in [5, 2m-5], j$ ganjil, dan sisi $u_{i+j}v_{i+j}$ untuk $j \in [8, 2m-8]$ dengan kondisi $2m+1 = 1$. Jika diberi warna yang sama akan terdapat beberapa lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$ untuk $i \in [1, 2m], 2m+1 = 1 | i$ ganjil, lintasan $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, u_{i+4}$ untuk $i \in [1, 2m], 2m+1 = 1 | i$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j}$ untuk $i \in [1, 2m], j \in [5, 2m-5], 2m+1 = 1 | i, j$ ganjil, lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}$ untuk $i \in [1, 2m], j \in [6, 2m-6], 2m+1 = 1 | i$ ganjil dan j genap, dan lintasan $u_i, v_i, v_{i+1}, v, v_{i+j+1}, v_{i+j}, u_{i+j}$ untuk $j \in [8, 2m-8]$ dengan kondisi $2m+1 = 1$. Sehingga, sisi u_iv_i diberi warna $c' \in \left[\frac{2m - \frac{m}{2}}{2} + 1, m-1\right]$ untuk $i \in \left[1, 8\left(m - 1 - \left\lfloor \frac{2m - \frac{m}{2}}{2} \right\rfloor\right)\right], i$ ganjil pada $m = 4n+8, n = \{1, 2, \ldots\}$ dan diberi warna $c' \in \left[\left\lfloor \frac{2m - \frac{m}{2}}{2} \right\rfloor, m-1\right]$ untuk $i \in \left[1, 8\left(m - 4 - \left\lfloor \frac{2m - \frac{m}{2}}{2} \right\rfloor\right)\right] \wedge i = 2m-1, i$ ganjil pada $m = 4n+10, n = \{1, 2, \ldots\}$, dan untuk i lainnya tidak dapat lagi diberi warna c'. Sehingga, pada graf salju (Sn_m) untuk $m \geq 12$ dan m genap bukan merupakan pewarnaan-$(m-1)$ pelangi.

Karena graf salju (Sn_m) untuk $m \geq 12, m$ genap bukan merupakan pewarnaan-$(m-1)$ pelangi, maka diperoleh $rc(Sn_m) \geq m$ untuk $m \geq 12, m$ genap. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Sn_m) \leq m$ untuk $m \geq 12, m$ genap dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, m\}$ sebagai berikut:

$$c(u_i c_{i+1}) = \begin{cases} i,\ i \in [1, m] \\ (i \bmod m) + 1,\ i \in [m+1, 2m-1] | i\ ganjil \\ (i \bmod m) - 1,\ i \in [m+1, 2m-1] | i\ genap \end{cases}$$

$$c(v_i u_i) = c(v_{2m-1} u_{2m-1}) = 4$$

$$c(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} i \bmod m,\ i \in [1, m-1] | i\ ganjil \\ (i \bmod m) + 1,\ i \in [m+1, 2m-1] | i\ ganjil \wedge i \in [m, 2m-2] | i\ genap \\ (i \bmod m) + 2,\ i = 2m \wedge i \in [2, m-2] | i\ genap \end{cases}$$

$$c(u_{2m} u_1) = m - 1 \tag{5}$$

$$c(v_i u_i) = c(v_{i+2} u_{i+2}) =$$

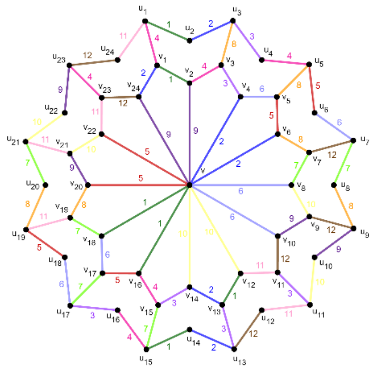
$$\begin{cases} \big((i+1) mod\ m\big) + 2,\ i = 4n-1, i \in [3, m-5], \\ \quad m = 4n+8, n = \{1,2, \ldots\} \wedge \\ \quad i = 4n-1, i \in [3, m-1], \\ \quad m = 4n+10, n = \{1,2, \ldots\} \\ \big((i+1) mod\ m\big) + 1,\ i = 4n-1, i \in [m-1, 2m-3], \\ \quad m = 4n+8, n = \{1,2, \ldots\} \\ \quad i = 4n-1, i \in [m+1, 2m-3], \\ \quad m = 4n+10, n = \{1,2, \ldots\} \end{cases}$$

$$c(vv\_2) = c(vv\_2m) = \begin{cases} \big((2m-2) mod\ m\big) - 1,\ m = 8 \wedge m \geq 12 | m\ genap \\ 10,\ m = 10 \end{cases}$$

$$c(vv_i) = c(vv_{i+2}) =$$

$$\begin{cases} i - 2,\ i = 4n, i \in [4, m], m = 4n+8, n = \{1,2, \ldots\} \\ \quad i = 4n, i \in [4, m+2], m = 4n+10, n = \{1,2, \ldots\} \\ (i-3) mod\ m,\ i = 4n, i \in [m+4, 2m-2], m = 4n+8, n = \{1,2, \ldots\} \\ \quad i = 4n, i \in [m+6, 2m-2], m = 4n+10, n = \{1,2, \ldots\} \end{cases}$$

Pewarnaan pelangi untuk Sn_{12} ditunjukkan pada Gambar 2. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa setiap pasang titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m \geq 12, m$ genap yang tidak saling bertetangga terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c. Lebih jelasnya lintasan pelangi disetiap dua titik $x, y \in V(Sn_m)$ untuk $m \geq 12, m$ genap dengan kondisi $2m + 1 = 1$ dan $1 - 1 = 2m$ dapat dilihat pada table 5. □



Gambar 2. Pewarnaan Pelangi Sn_{12}

III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa graf salju (Sn_m) memiliki bilangan terhubung pelangi yang berbeda untuk setiap bilangan bulat positif $m \geq 3$ dan dibuktikan dengan memperlihatkan lintasan lintasan pelangi.

REFERENSI

[1] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed. India: Pearson Education, 2002.
[2] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th ed. Berlin: Springer Nature, 2017.
[3] I. K. Budayasa, *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press, 2007.
[4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS*. United States of America: Elsevier Science Publishing Co., Inc, 1976.
[5] W. Ummah, "Pelabelan Graf (Graph Labelling)," 2013. [Online]. Available: https://www.academia.edu/ 4306800/PELABELAN_GRAF.
[6] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs & Digraphs*, 6th ed. New York: Chapman & Hall/CRC, 2015.
[7] G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon, and P. Zhang, "Rainbow Connection in Graphs," *Math. Bohem.*, vol. 133, pp. 85–98, 2008.
[8] S. Rahayuningsih, *TEORI GRAPH DAN PENERAPANNYA*. Malang: Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press), 2018.
[9] C. Vasudev, *Graph Theory with Application*. New Delhi: New Age International Publishers, 2006.
[10] J. M. Harris, J. L. Hirst, and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed. USA: Springer, 2008.
[11] S. Sy and R. Wijaya, "Rainbow connection numbers of some graphs," *Appl. Math. Sci.*, vol. 8, no. 93–96, pp. 4693–4696, 2014, doi: 10.12988/ams.2014.46398.
[12] S. Sy, G. H. Medika, and L. Yulianti, "The rainbow connection of fan and sun," *Appl. Math. Sci.*, vol. 7, no. 61–64, pp. 3155–3160, 2013, doi: 10.12988/ams.2013.13275.
[13] I. S. Kumala, "BILANGAN TERHUBUNG PELANGI GRAF BUNGA (W_m, K_n) DAN GRAF LEMON (Le_n)," *J. Mat. dan Pendidik. Mat.*, vol. 4, 2019.
[14] D. Fitriani and A. M. N. Salman, "Rainbow connection number of amalgamation of some graphs," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 2016, doi: https://doi.org/10.1016/j.akcej.2016.03.004.
[15] R. Munir, *Matematika Diskrit*, 3rd ed. Bandung: Informatika Bandung, 2010.

[16] J. A. Gallian, "A dynamic survey of graph labeling," *Electron. J. Comb.*, vol. 1, p. 13, 2018.
[17] C. Vasudev, *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International Publishers, 2007.
[18] M. Almaliki, "Ini Loh Bentuk Salju Asli, Unik Seperti Gambar Bintang, Kok Bisa?," 2021. [Online]. Available: https://era.id/sains/51891/ini-loh-bentuk-salju-asli-unik-seperti-gambar-bintang-kok-bisa.
[19] Y. Irene, "PELABELAN TOTAL (a. d) SISI ANTIAJAIB SUPER PADA GRAF P_3∪P_n," *J. "LOG!K@,"* vol. 6, pp. 152–160, 2016.
[20] M. Bóna, *A walk through combinatorics : an introduction to enumeration and graph theory*, 4th ed. USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2017.