JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 1 (JUN 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

DETERMINAN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

Ade Novia Rahma[1*], Esty Erizona[2], Rahmawati[3]

[1,2,3]*Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau*
Email : [1]adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id, [2]estyerizona4@gmail.com, [3]rahmawati.@uin-suska.ac.id,
*penulis korespondensi

Abstract. *This research aims to determine the determinant of a centrosymmetric matrix of a special shape of the order* $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ *of the rank of exponential number with positive integer exponent. First, consider the shape of the centrosymmetric matrix pattern of the special forms* ${\boldsymbol{A}_4}^{\mathbf{2}}$ *to* ${\boldsymbol{A}_4}^{\mathbf{10}}$ *so that the general shape is obtained. Second, pay attention to the shape of the determinant pattern of centrosymmetric matrices special forms* ${\boldsymbol{A}_4}^{\mathbf{2}}$ *to* ${\boldsymbol{A}_4}^{\mathbf{10}}$ *so that the general form is obtained. so that the general form of the centrosymmetric matrix form is special Proof of the general form of the matrix, determinant using the mathematical induction method and direct proof. The final results in this research obtained the general form of the matrix, determinant of the centrosymmetric matrix of special shapes positive with* $\boldsymbol{n}$ *odd and even* $\boldsymbol{n}$*.*
Keywords: *centrosymmetric matrix, mathematical induction, determinant, direct proof, matrix elevation.*

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan dari suatu matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam menentukan determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus terdapat beberapa langkah yang perlu dikerjakan. Pertama perhatikan bentuk pola matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ${A_4}^2$ sampai ${A_4}^{10}$ sehingga didapat bentuk umumnya kemudian dibuktikan dengan induksi matematika. Kedua perhatikan bentuk pola determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ${A_4}^2$ sampai ${A_4}^{10}$ sehingga didapat bentuk umumnya lalu dibuktikan dengan pembuktian langsung. Hasil akhir dalam penelitian ini diperoleh bentuk umum matriks, determinan dari matriks *centrosymmetric* berpangkat bilangan bulat positif dengan n ganjil dan n genap.
Kata Kunci: Matriks Centrosymmetric, Induksi Matematika, Determinan, Pembuktian Langsung, Perpangkatan Matriks.

I. PENDAHULUAN

Menurut Nurkhasannah [4] Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matriks. Diberikan $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn} \in R^{nxn}$ adalah matriks *centrosymmetric,* jika $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ atau dapat ditulis

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dalam teori matriks terdapat berbagai macam operasi matriks diantaranya yaitu perkalian matriks, perpangkatan matriks, invers matriks dan determinan matriks. Dalam penelitian ini hanya membahas mengenai determinan matriks. Menurut Anton [2] Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka bilangan yang dihasilkan dari perkalian entri-entri di setiap baris atau kolom A oleh kofaktor yang bersesuaian lalu menjumlahkan hasil perkalian tersebut dikatakan determinan A.

Pembahasan mengenai determinan suatu matriks telah banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya. Pada tahun 2016, terdapat penelitian yang membahas tentang determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks Teoplitz Tridiagonal [3]. Pada tahun 2018, terdapat penelitian yang membahas tentang bentuk umum determinan matrik FLDcircr menggunakan ekspansi kefaktoran, matriks kofaktor dari FLDcircr dan bentuk umum invers matriks FLDcircr menggunakan metode adjoin [8] .

Dari Persamaan (1), pada tulisan ini penulis tertarik mengulas tentang determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4. Dimana $a_{11}, a_{13}, a_{23} = a$ dan $a_{12}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{24} = 0$ atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R. \quad (2)$$

II. METODE DAN BAHAN PENELITIAN

Penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan menggunakan referensi seperti buku referensi, jurnal dan internet. Adapun teori pendukung yang penulis gunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 1 [2] *Jika A adalah matriks persegi, maka perpangkatan bilangan bulat non-negatif dari A didefinisikan sebagai:*

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = A\,A \dots A \text{ [n faktor]}$$

dan jika A invertible, maka perpangkatan bilangan bulat negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1} \text{ [n faktor].}$$

Teorema 1 [2] *Jika A adalah invertible dan* n *adalah bilangan bulat non-negatif, maka*

a) A^{-1} *adalah invertible dan* $(A^{-1})^{-1} = A$
b) A^n *adalah invertible dan* $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$
c) kA *adalah invertible untuk setiap skalar k yang bukan nol dan* $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Definisi 2 [9] *Matriks centrosymmetric merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matriks.*

Diberikan $A = (a_{ij})_{nxn} \in R^{nxn}$ adalah matriks *centrosymmetric,* jika $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ atau dapat ditulis

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 1 (JUN 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

asalkan limitnya ada dan bukan ∞ *atau* $-\infty$.

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Definisi 3 [6] *Diberikan matriks S berorde n × n. Matriks S disebut matriks centrosymmetric jika memenuhi*

$$S^R=S.$$

Lemma 1.

i. *Jika* $S=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ *maka S adalah matriks centrosymmetric*

ii. *Jika* $S=\begin{bmatrix} a & c & b \\ d & e & d \\ b & c & a \end{bmatrix}$ *maka S adalah matriks centrosymmetric*

Selanjutnya bentuk umum matriks *centrosymmetric* dengan ordo $n \geq 4$ dibagi ke dalam 2 kasus yakni n genap dan n ganjil. Untuk kasus n genap yakni $n=2m$ maka misalkan matriks *S* berbentuk matriks blok sebagai berikut.

$$S=\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

Dengan *A, B, C* dan *D* adalah matriks persegi berorde *m*. Matriks *S* harus memenuhi $S^R=S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{bmatrix} O_m & J_m \\ J_m & O_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_m & J_m \\ J_m & O_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m B J_m \\ J_m C J_m & J_m A J_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}.$$

Dari bentuk berakhir diperoleh $D=J_m A J_m$ dan $C=J_m B J_m$. Hasil ini diperoleh dalam lema berikut.

Lema 2. *Jika S adalah matriks centrosymmetric berorde genap yakni* $n=2m$ *maka S dapat ditulis dalam bentuk matriks blok sebagai berikut.*

$$S=\begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$$

dengan A dan B adalah matriks persegi berorde m.

Bentuk matriks S pada lema diatas bukan bentuk tunggal karena matriks S dapat ditulis dalam bentuk
$S=\begin{bmatrix} A & B \\ J_m B J_m & J_m A J_m \end{bmatrix}$ atau $S=\begin{bmatrix} A & J_m B \\ B J_m & J_m A J_m \end{bmatrix}$.

Definisi 4 [2] *Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari entri* a_{ij} *dinotasikan oleh* M_{ij} *dan didefinisikan menjadi determinan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke*$-i$ *dan kolom ke*$-j$ *dihapus dari A. Bilangan* $(-1)^{i+j}M_{ij}$ *dinotasikan oleh* C_{ij} *dan disebut kofaktor dari entri* a_{ij}.

Definisi 5 [7] *Jika A adalah matriks berukuran* $n \times n$, *maka bilangan yang dihasilkan dari perkalian entri-entri di setiap baris atau kolom A oleh kofaktor yang bersesuaian lalu menjumlahkan hasil perkalian tersebut dikatakan determinan A. Jumlah-jumlah dari keseluruhannya disebut ekspansi kofaktor dari A yang dituliskan sebagai berikut:*
ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$:
$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$
ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$:
$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Definisi 6 [7] *Misalkan* $p(n)$ *adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa* $p(n)$ *benar untuk semua bilangan bulat positif* n. *Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan.*

1. $p(1)$ *benar, dan*
2. *Jika* $p(n)$ *benar, makan* $p(n+1)$ *juga benar untuk setiap* $n \geq 1$. *Sehingga* $p(n)$ *benar untuk semua bilangan bulat positif* n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Lagkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

III. PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan ditentukan bentuk umum determinan dari matriks *centrosymmetric* bentuk khusus pada Persamaan (2) berpangkat bilangan bulat positif. Langkah pertama yaitu menentukan nilai perpangkatan matriks ${A_4}^2$ sampai ${A_4}^{10}$sebagai berikut:

$${A_4}^2 = A_4 \,.\, A_4$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka didapatkan

$$A_4^{\ 3}=\begin{bmatrix} a^3 & a^3 & 2a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^3 & a^3 & a^3 \end{bmatrix},\ A_4^{\ 4}=\begin{bmatrix} a^4 & 2a^4 & 2a^4 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 2a^4 & 2a^4 & a^4 \end{bmatrix},\ A_4^{\ 5}=\begin{bmatrix} a^5 & 2a^5 & 3a^5 & 0 \\ 0 & 0 & a^5 & 0 \\ 0 & a^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3a^5 & 2a^5 & a^5 \end{bmatrix},$$

$$A_4^{\ 6}=\begin{bmatrix} a^6 & 3a^6 & 3a^6 & 0 \\ 0 & a^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^6 & 0 \\ 0 & 3a^6 & 3a^6 & a^6 \end{bmatrix},\ A_4^{\ 7}=\begin{bmatrix} a^7 & 3a^7 & 4a^7 & 0 \\ 0 & 0 & a^7 & 0 \\ 0 & a^7 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^7 & 3a^7 & a^7 \end{bmatrix},\ A_4^{\ 8}=\begin{bmatrix} a^8 & 4a^8 & 4a^8 & 0 \\ 0 & a^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^8 & 0 \\ 0 & 4a^8 & 4a^8 & a^8 \end{bmatrix},$$

$$A_4^{\ 9}=\begin{bmatrix} a^9 & 4a^9 & 5a^9 & 0 \\ 0 & 0 & a^9 & 0 \\ 0 & a^9 & 0 & 0 \\ 0 & 5a^9 & 4a^9 & a^9 \end{bmatrix},\ A_4^{\ 10}=\begin{bmatrix} a^{10} & 5a^{10} & 5a^{10} & 0 \\ 0 & a^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{10} & 0 \\ 0 & 5a^{10} & 5a^{10} & a^{10} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya bentuk umum matriks berpangkat $A_4^{\ n}$ n ganjil dan n genap dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 2 *Diberikan* $A_4=\begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}$, $\forall a \in R$. *Maka*

$$A_4^{\ n}=\begin{bmatrix} a^n & \frac{n-1}{2}a^n & \frac{n+1}{2}a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{bmatrix} \qquad \textit{untuk n ganjil}$$

$$A_4^{\ n}=\begin{bmatrix} a^n & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{bmatrix} \qquad \textit{untuk n genap.}$$

Bukti : Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut :

Misalkan $p(n): A_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & \frac{n-1}{2}a^n & \frac{n+1}{2}a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}$ untuk n ganjil dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Dengan melihat Persamaan (2) maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan untuk $n = k, p(k)$ benar, yaitu

$$p(k): A_4{}^k = \begin{bmatrix} a^k & \frac{k-1}{2}a^k & \frac{k+1}{2}a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k+1}{2}a^k & \frac{k-1}{2}a^k & a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan untuk $n = k + 2, p(k + 2)$ juga benar yaitu :

$$p(k+2): A_4{}^{k+2} = \begin{bmatrix} a^{k+2} & \frac{k+1}{2}a^{k+2} & \frac{k+3}{2}a^{k+2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{k+2} & 0 \\ 0 & a^{k+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k+3}{2}a^{k+2} & \frac{k+1}{2}a^{k+2} & a^{k+2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Pembuktiannya :

$$A_4{}^{k+2} = A_4{}^k A_4{}^2$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & \frac{k-1}{2}a^k & \frac{k+1}{2}a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k+1}{2}a^k & \frac{k-1}{2}a^k & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^{k+2} & \frac{k+1}{2}a^{k+2} & \frac{k+3}{2}a^{k+2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{k+2} & 0 \\ 0 & a^{k+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k+3}{2}a^{k+2} & \frac{k+1}{2}a^{k+2} & a^{k+2} \end{bmatrix}.$$

Dengan melihat Persamaan (3) maka $p(k+2)$ benar.
Dari langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar. Maka terbukti

$$A_4^{\ n}=\begin{bmatrix} a^n & \frac{n-1}{2}a^n & \frac{n+1}{2}a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil.}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

Misalkan $p(n): A_4^{\ n}=\begin{bmatrix} a^n & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}$ untuk n genap akan dibuktikan sebagai berikut:

1) Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): A_4^{\ 2} = A_4A_4$$

$$=\begin{bmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan diatas maka $p(2)$ benar.

2) Asumsikan untuk $n = k, p(k)$ benar, yaitu

$$p(k): A_4^{\ k}=\begin{bmatrix} a^k & \frac{k}{2}a^k & \frac{k}{2}a^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & \frac{k}{2}a^k & \frac{k}{2}a^k & a^k \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan untuk $n = k + 2, p(k + 2)$ juga benar yaitu :

$$p(k+2): A_4^{k+2} = \begin{bmatrix} a^{k+2} & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & 0 \\ 0 & a^{k+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{k+2} & 0 \\ 0 & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & a^{k+2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Pembuktiannya :

$$A_4^{k+2} = A_4^k A_4^2$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & \frac{k}{2}a^k & \frac{k}{2}a^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & \frac{k}{2}a^k & \frac{k}{2}a^k & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+2} & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & 0 \\ 0 & a^{k+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{k+2} & 0 \\ 0 & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & \frac{k+2}{2}a^{k+2} & a^{k+2} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (5) maka $p(k+2)$ benar.
Dari langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar. Maka terbukti

$$A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Berdasarkan pembuktian diatas, maka Teorema 2 terbukti.

Berdasarkan Teorema 2, maka didapatkan bentuk umum invers matriks *centrosymmetric* bentuk khusus Persamaan (2) yang diberikan dalam Teorema berikut:

Teorema 3 *Diberikan* $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}$, $\forall a \in R$. *Maka*

$$|A_4^n| = -a^{4n} \quad \text{, untuk } n \text{ ganjil}$$

$$|A_4^n| = a^{4n} \quad \text{,untuk } n \text{ genap.}$$

Bukti :

Akan dibuktikan $\left|A_4^{\,n}\right| = -a^{4n}$, untuk n ganjil sebagai berikut :

Berdasarkan Teorema 4.1 didapatkan bentuk umum $A_4^{\,n}$ (untuk n bilangan ganjil) yang akan digunakan untuk membuktikan dugaan bentuk umum perpangkatan determinan menggunakan pembuktian langsung dengan kofaktor baris pertama sebagai berikut:

$$A_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & \frac{n-1}{2}a^n & \frac{n+1}{2}a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\left|A_4^{\,n}\right| = a^n \begin{vmatrix} 0 & a^n & 0 \\ a^n & 0 & 0 \\ \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{vmatrix} - \left(\frac{n-1}{2}a^n\right)\begin{vmatrix} 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2}a^n & a^n \end{vmatrix} + \left(\frac{n+1}{2}a^n\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & a^n \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 & a^n \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2}a^n & \frac{n-1}{2}a^n \end{vmatrix}$$

$$= a^n\left(-a^{3n}\right) - \frac{n-1}{2}a^n(0) + \frac{n+1}{2}a^n(0) - 0(0)$$

$$= -a^{4n}$$

Sehingga terbukti $\left|A_4^{\,n}\right| = -a^{4n}$, untuk n ganjil.

Selanjutnya Akan dibuktikan $\left|A_4^{\,n}\right| = a^{4n}$, untuk n genap sebagai berikut :

Berdasarkan Teorema 4.1 didapatkan bentuk umum $A_4^{\,n}$ (untuk n bilangan genap) yang akan digunakan untuk membuktikan dugaan bentuk umum perpangkatan determinan menggunakan pembuktian langsung dengan kofaktor baris pertama sebagai berikut:

$$A_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\left|A_4^{\,n}\right| = a^n \begin{vmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{vmatrix} - \left(\frac{n}{2}a^n\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{vmatrix} + \left(\frac{n}{2}a^n\right)\begin{vmatrix} 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & a^n \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \\ 0 & \frac{n}{2}a^n & \frac{n}{2}a^n \end{vmatrix}$$

$$= a^n\left(a^{3n}\right) - \frac{n}{2}a^n(0) + \frac{n}{2}a^n(0) - 0(0)$$

$$= a^{4n}.$$

Sehingga terbukti $\left|A_4^{\,n}\right| = a^{4n}$,untuk n genap.

Berdasarkan pembuktian diatas, maka Teorema 3 terbukti.

Dari bentuk umum determinan perpangkatan matriks Centrosymmetric berlaku untuk semua n dengan matriks Centrosymmetric bentuk khusus ordo 4 × 4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan ekspansi kofaktor, sehingga jika terdapat suatu matriks centrosimetris seperti diatas sangat memudahkan untuk mencari determinan nya dengan Teorema 3.

IV. KESIMPULAN

Pada artikel ini, telah diperoleh bentuk umum dari Matriks *Centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif dengan n ganjil dan n genap. Selain itu, telah juga diperoleh bentuk umum dari determinan Matriks *Centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif dengan n ganjil dan n genap.

REFERENSI

[1] Anton, H., dan Chris R.*" Dasar-dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi Edisi kedelapan"*, Erlangga,Jakarta. 2004.
[2] Anton, H., dan Chris. R.*" Elementary Linear Algebra 11th edition"*. Wiley, Amerika.2013.
[3] Aryani, F., dan C. M. Corazon. *" Invers Of Tridiagonal Teoplitz Matrix By Adjoin Method"*. Uin Suska Riau, Pekanbaru. 2016.
[4] Corazon, C., dan F. Aryani. " Invers Matriks Teoplitz Khusus Menggunakan Metode Adjoin". *Jurnal sains matematika dan statistika*. Vol 5, No. 1, halaman 58-67, Januari 2019.
[5] Khasanah, Nur, dkk. "Analisis Konvergensi dari Komputasi Invers Matriks Centrosymmetric". *Prosiding SNMPM undip.* halaman 15-19, 2015.
[6] Khasanah, Nur, dkk. "The Algorithm of Determinant Centrosymmetric Matrix Based on Lower Hessenberg Form". *Conference Series*. halaman 1-6, 2017.
[7] Rinaldi, Munir. *" Matematika Diskrit"*. Edisi Revisi kelima. Informatika, Bandung. 2005.
[8] Rysfan. *"Menentukan Invers Matriks Fldcircr dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin*". UIN Suska Riau, 2018.
[9] Tamasouw, Berny Pebo."Karekteristik Matriks Centro-Simetris". *Barekeng.* Vol 10, No.2, Hal. 69-76, 2016.
[10] Ulfah, Maysarah. *" Invers Matriks Tak Negatif Menggunakan Metode Adjoin"*. UIN Suska Riau, 2017.