JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 3 NO. 2 (NOV 2020)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

HASIL TAMBAH LANGSUNG SUATU (R, S)-MODUL

Dian Ariesta Yuwaningsih

Pendidikan Matematika, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, Indonesia
Email: dian.ariesta@pmat.uad.ac.id

Abstract. Let R and S are arbitrary rings. A module can be generalized to (R, S)-bimodules. Furthermore, an (R, S)-bimodule has undergone generalization to (R, S)-modules. Following the completion of this generalization, the basic concept in the module can also be generalized into (R, S)-modules. One of the basic concepts in module theory which can be generalized to (R, S)-module is about the direct sum of a module. This research aims to construct the definitions of the direct sum of an (R, S)-module and investigate its properties. In addition, we will construct the definition of projectiom of (R, S)-modules and investigate its singularity.
Keywords: direct sum, (R, S)-module, projection of module

Abstrak. Diberikan R dan S merupakan ring sebarang. Suatu modul dapat diperumum menjadi (R, S)-bimodul. Selanjutnya, (R, S)-bimodul telah mengalami perumuman menjadi (R, S)-modul. Seiring proses perumuman ini, konsep dasar di dalam modul juga dapat digeneralisasi ke dalam (R, S)-modul. Salah satu konsep dasar pada teori modul yang dapat digeneralisasi ke dalam (R, S)-modul adalah tentang hasil tambah langsung suatu modul. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksikan pendefinisian hasil tambah langsung suatu (R, S)-modul dan menyelidiki sifat-sifatnya. Selain itu, akan dikonstruksikan pula pendefinisian proyeksi dari (R, S)-modul dan diselidiki sifat ketunggalannya.
Kata Kunci: hasil tambah langsung, (R, S)-modul, proyeksi modul

I. PENDAHULUAN

Modul merupakan salah satu bentuk struktur aljabar yang merupakan perumuman dari suatu ruang vektor. Pembeda antara modul dan ruang vektor adalah jika dalam pembentukan ruang vektor melibatkan suatu lapangan tetapi pada pembentukan modul cukup melibatkan suatu ring dengan elemen satuan. Selanjutnya apabila diberikan ring R dan ring S sebarang, dapat dibentuk suatu R-modul kiri dan S-modul kanan. Struktur modul dapat mengalami perumuman menjadi struktur (R, S)-bimodul. Suatu grup abelian M merupakan (R, S)-bimodul jika M merupakan R-modul kiri, S-modul kanan, serta memenuhi sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R, m \in M$, dan $s \in S$ memenuhi sifat $r(ms) = (rm)s$. Konsep terkait modul dan bimodul ini dapat dipelajari pada [1] dan [2].

Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, suatu (R, S)-bimodul mengalami perumuman menjadi (R, S)-modul. Diberikan S^* adalah ring matriks diagonal berukuran 2×2 atas $2\mathbb{Z}$, ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$, dan grup Abelian $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in 2\mathbb{Z} \right\}$ terhadap operasi penjumlahan vektor. Dibentuk ring S yakni ring S^* dengan operasi perkalian yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap matriks diagonal A, B di S didefinisikan $AB :=$

BA. Selanjutnya, didefinisikan operasi pergandaan skalar $*: M \times S \longrightarrow M$ dengan $m * A := Am$ untuk setiap vektor $m \in M$ dan matriks diagonal $A \in S$. Ternyata diperoleh bahwa grup aditif abelian M merupakan R-modul kiri serta merupakan S-modul kanan. Kemudian diambil sebarang matriks $B \in R$, vektor $m \in M$, dan matriks diagonal $A \in S$, diperoleh bahwa $(Bm) * A \neq B(m * A)$. Dengan demikian, M bukan merupakan (R, S)-bimodul karena sifat kompabilitas tidak dipenuhi. Selanjutnya, didefinisikan operasi pergandaan skalar $(\cdot, *)$: $R \times M \times S \longrightarrow M$ dengan definisi $B \cdot m * A := ABm$ untuk setiap matriks $B \in R$, vektor $m \in M$, dan matriks diagonal $A \in S$. Diambil sebarang matriks $B, B' \in R$, vektor $m, n \in M$, dan matriks diagonal $A, A' \in S$. Ternyata terhadap operasi pergandaan skalar "$(\cdot, *)$" grup Abelian M memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(i). $B \cdot (m + n) * A = B \cdot m * A + B \cdot n * A$

(ii). $(B + B') \cdot m * A = B \cdot m * A + B' \cdot m * A$

(iii). $B \cdot m * (A + A') = B \cdot m * A + B \cdot m * A'$

(iv). $B(B' \cdot m * A)A' = (BB') \cdot m * (AA')$

Karena sifat kompabilitas pada pendefinisian bimodul tidak dipenuhi dan M memenuhi keempat aksioma di atas, maka munculah struktur aljabar yang disebut dengan (R, S)-modul. Konsep terkait (R, S)-modul ini diperkenalkan oleh [3]. Diberikan ring R dan S, serta grup abelian $(M, +)$. Didefinisikan fungsi pergandaan skalar $(\cdot, \bullet) : R \times M \times S \longrightarrow M$ dengan $(\cdot, \bullet)(r, m, s) = r \cdot m \bullet s$ untuk setiap $r \in R$, $m \in M$, dan $s \in S$. Grup abelian M merupakan (R, S)-modul terhadap operasi pergandaan skalar $(\cdot, \bullet)$ apabila untuk setiap $r, r' \in R$, $m, n \in M$, dan $s, s' \in S$ memenuhi:

(i). $r \cdot (m + n) \bullet s = r \cdot m \bullet s + r \cdot n \bullet s$

(ii). $(r + r') \cdot m \bullet s = r \cdot m \bullet s + r' \cdot m \bullet s$

(iii). $r \cdot m \bullet (s + s') = r \cdot m \bullet s + r \cdot m \bullet s'$

(iv). $r(r' \cdot m \bullet s)s' = (rr') \cdot m \bullet (ss')$

Dalam [3], disajikan bahwa (R, S)-modul merupakan generalisasi dari (R, S)-bimodul. Setiap (R, S)-bimodul merupakan (R, S)-modul, tetapi terdapat (R, S)-modul yang bukan merupakan (R, S)-bimodul seperti yang diberikan pada contoh di atas. Dengan demikian, (R, S)-modul merupakan generalisasi dari suatu (R, S)-bimodul. Selanjutnya, setiap (R, S)-modul dapat menjadi (R, S)-bimodul apabila ring R dan ring S masing-masing mempunyai elemen idempoten sentral. Eksistensi elemen idempoten sentral ini digunakan dalam pendefinisian operasi pergandaan skalar serta sifat kompabilitas dalam pembentukan (R, S)-bimodul. Akibatnya, jika ring R dan ring S merupakan ring dengan elemen satuan maka suatu (R, S)-modul otomatis akan membentuk (R, S)-bimodul. Oleh karena itu, pada keseluruhan tulisan ini ring yang dimaksud merupakan ring sebarang kecuali dinyatakan selain itu.

Penelitian terkait (R, S)-modul merupakan sesuatu yang menarik untuk dipelajari. Hal ini dikarenakan masih jarang peneliti yang menyelidiki struktur (R, S)-modul, sehingga banyak konsep yang dapat digali di dalamnya. Salah satu penelitian terkait (R, S)-modul yang menarik dipelajari adalah terkait struktur homomorfisma dan teorema utama isomorfisma (R, S)-modul yang disajikan dalam [4]. Selain itu, beberapa konsep terkait keprimaan pada (R, S)-modul telah diteliti dan disajikan dalam paper [5], [6], dan [7]. Selain itu, konsep terkait salah satu radikal keprimaan suatu (R, S)-modul juga telah dibahas di dalam paper [8].

Di sisi lain, pada teori modul dikenal adanya hasil tambah langsung suatu modul. Menurut [1], jika diberikan himpunan tak kosong I dan keluarga himpunan R-modul $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ maka hasil tambah langsung dari modul M_α untuk setiap $\alpha \in I$ adalah himpunan $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ dimana $x_\alpha = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I, dinotasikan dengan $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$. Penelitian terkait hasil tambah langsung suatu (R, S)-modul belum pernah dilakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikonstruksi pendefinisian hasil tambah langsung suatu (R, S)-modul dan diselidiki beberapa sifat-sifatnya. Pada akhir penelitian ini, akan disajikan pengkonstruksian proyeksi dari (R, S)-modul dan penyelidikan terkait sifat ketunggalannya.

II. HASIL TAMBAH LANGSUNG INTERNAL SUATU (R, S)-MODUL

Pada bagian ini akan dibahas tentang hasil tambah langsung internal suatu (R, S)-modul. Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai hasil kali langsung pada suatu (R, S)-modul.

Definisi 1 *Diberikan $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ merupakan keluarga himpunan (R, S)-modul. Hasil kali langsung dari M_α untuk setiap $\alpha \in I$, didefinisikan sebagai himpunan*

$$\prod_{\alpha\in I} M_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \mid x_\alpha \in M_\alpha, \textit{ untuk setiap } \alpha \in I\}.$$

Seperti halnya dalam teori modul, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa hasil kali langsung $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ merupakan (R, S)-modul terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan skalar yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} + (y_\alpha)_{\alpha\in I} := (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha\in I}$$

dan

$$r(x_\alpha)_{\alpha\in I}s := (rx_\alpha s)_{\alpha\in I}$$

untuk setiap $(x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, $r \in R$, dan $s \in S$.

Setelah mengetahui definisi hasil kali langsung suatu (R, S)-modul, selanjutnya berikut diberikan definisi hasil tambah langsung suatu (R, S)-modul.

Definisi 2 *Diberikan $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ merupakan keluarga himpunan (R, S)-modul. Hasil tambah langsung dari M_α untuk setiap $\alpha \in I$, didefinisikan sebagai himpunan:*

$$\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha = \Big\{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \mid x_\alpha = 0, \textit{ kecuali untuk berhingga banyak indeks } I\Big\}.$$

Berdasarkan definisi di atas, diketahui bahwa hasil tambah langsung suatu (R,S)-modul merupakan himpunan bagian dari hasil kali langsung suatu (R,S)-modul, yaitu $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \subseteq \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$. Menurut [3], apabila diberikan (R,S)-modul M dan himpunan tak kosong $N \subseteq M$, maka N disebut (R,S)-submodul dari M apabila N merupakan subgrup aditif dari M serta merupakan (R,S)-modul terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan M.

Proposisi 1 [3] *Diberikan (R,S)-modul M dan himpunan tak kosong $N \subseteq M$. Himpunan N merupakan submodul dari (R,S)-modul M jika dan hanya jika memenuhi sifat:*

(i). $a-b \in N$, untuk setiap $a,b \in N$.

(ii). $ras \in N$, untuk setiap $r \in R$, $a \in N$, dan $s \in S$.

Dengan menggunakan Proposisi 1, berikut ditunjukkan bahwa hasil tambah langsung (R,S)-modul merupakan (R,S)-submodul dari hasil kali langsung (R,S)-modul.

Proposisi 2 *Jika diberikan $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ merupakan keluarga himpunan (R,S)-modul, maka $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ merupakan (R,S)-submodul dari $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$.*

Bukti. Jelas bahwa $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \subseteq \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ dan $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \neq \emptyset$ karena $(0_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$.

(i). Diambil sebarang $(x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, maka $x_\alpha = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I dan $y_\alpha = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Diperoleh

$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} - (y_\alpha)_{\alpha\in I} = ((x-y)_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha.$$

(ii). Diambil sebarang $r \in R$, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, dan $s \in S$, maka $x_\alpha = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Diperoleh

$$r\Big((x_\alpha)_{\alpha\in I}\Big)s = (rx_\alpha s)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ merupakan (R,S)-submodul dari $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$. $\square$

Selanjutnya, hasil tambah langsung yang didefinisikan pada Definisi 2 biasa disebut dengan hasil tambah langsung eksternal suatu (R,S)-modul. Selanjutnya, berikut diberikan definisi hasil tambah langsung internal pada (R,S)-modul.

Definisi 3 *Diberikan (R,S)-modul M dan $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ merupakan keluarga submodul dari (R,S)-modul M. M disebut hasil tambah langsung internal suatu (R,S)-submodul M_α untuk setiap $\alpha \in I$ apabila memenuhi sifat $M = \sum\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ dan $M_\beta \cap \sum\limits_{\alpha\in I\setminus\{\beta\}} M_\alpha = \{0\}$ untuk setiap $\beta \in I$.*

Sebelum membahas sifat dari hasil tambah langsung internal, berikut disajikan definisi dari homomorfisma (R, S)-modul.

Definisi 4 [4] *Diberikan (R, S)-modul M dan N. Fungsi $f : M \to N$ disebut homomorfisma (R, S)-modul apabila memenuhi sifat:*

(i). $f(m + m') = f(m) + f(m')$, *untuk setiap* $m, m' \in M$.

(ii). $f(rms) = rf(m)s$, *untuk setiap* $r \in R$, $m \in M$, *and* $s \in S$.

Berdasarkan [4], suatu homomorfisma (R, S)-modul f disebut isomorfisma (R, S)-modul apabila f merupakan fungsi bijektif. Kemudian, (R, S)-modul M dan N dikatakan isomorfis, dinotasikan dengan $M \cong N$, apabila terdapat suatu isomorfisma (R, S)-modul dari M ke N atau sebaliknya.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu teorema yang merupakan syarat cukup suatu (R, S)-modul M isomorfis dengan suatu hasil tambah langsung internal.

Teorema 1 *Jika diberikan (R, S)-modul M dan $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ merupakan keluarga (R, S)-submodul di M sedemikian hingga memenuhi sifat:*

(i). $M = \sum\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$.

(ii). $M_\beta \cap \sum\limits_{\alpha \in I \setminus \{\beta\}} M_\alpha = \{0\}$, *untuk setiap* $\beta \in I$.

maka diperoleh $M \cong \bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$.

Bukti. Didefinisikan pengaitan $f : \bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha \longrightarrow M$ dengan $f\Big((x_\alpha)_{\alpha \in I}\Big) = \sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha$, untuk setiap $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan suatu isomorfisma (R, S)-modul.

(i). Diambil sebarang $(x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$ dengan $(x_\alpha)_{\alpha \in I} = (y_\alpha)_{\alpha \in I}$, maka diperoleh bahwa $x_\alpha = y_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in I$. Akibatnya, diperoleh:

$$f\Big((x_\alpha)_{\alpha \in I}\Big) = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} y_\alpha = f\Big((y_\alpha)_{\alpha \in I}\Big).$$

Jadi, terbukti bahwa f merupakan suatu fungsi.

(ii). Diambil sebarang $(x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$, $r \in R$, dan $s \in S$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f\Big((x_\alpha)_{\alpha \in I} + (y_\alpha)_{\alpha \in I}\Big) &= f\Big((x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in I}\Big) \\ &= \sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha \\ &= f\Big((x_\alpha)_{\alpha \in I}\Big) + f\Big((y_\alpha)_{\alpha \in I}\Big) \end{aligned}$$

dan

$$f\Big((rx_\alpha s)_{\alpha\in I}\Big) = \sum_{\alpha\in I} rx_\alpha s = r\Big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\Big)s = rf\Big((x_\alpha)_{\alpha\in I}\Big)s.$$

Jadi, terbukti bahwa f merupakan homomorfisma (R,S)-modul.

(iii). Diambil sebarang $(x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ dengan:

$$f\Big((x_\alpha)_{\alpha\in I}\Big) = f\Big((y_\alpha)_{\alpha\in I}\Big).$$

Akan ditunjukkan bahwa $(x_\alpha)_{\alpha\in I} = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$. Oleh karena diketahui bahwa $f\Big((x_\alpha)_{\alpha\in I}\Big) = f\Big((y_\alpha)_{\alpha\in I}\Big)$, maka $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, sehingga $\sum_{\alpha\in I} (x_\alpha - y_\alpha) = 0$. Selanjutnya, diambil sebarang $\beta \in I$. Diperoleh bahwa $(x_\beta - y_\beta) = -\Big(\sum_{\alpha\in I\setminus\{\beta\}} (x_\alpha - y_\alpha)\Big)$, sehingga $(x_\beta - y_\beta) \in M_\beta \cap \sum_{\alpha\in I\setminus\{\beta\}} M_\alpha$. Berdasarkan yang diketahui maka $x_\beta - y_\beta = 0$, sehingga diperoleh $x_\beta = y_\beta$. Karena pengambilan $\beta \in I$ sebarang, maka terbukti bahwa $x_\alpha = y_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in I$. Dengan demikian, diperoleh $(x_\alpha)_{\alpha\in I} = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$. Jadi, terbukti bahwa f bersifat injektif.

(iv). Diambil sebarang $y \in M$. Berdasarkan yang diketahui maka $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, dengan $y_\alpha \in M_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in I$ dan $y_\alpha = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Berarti terdapat elemen $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ sehingga memenuhi $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha = f\Big((y_\alpha)_{\alpha\in I}\Big)$. Jadi, terbukti bahwa f bersifat surjektif.

Dengan demikian, terbukti bahwa f merupakan suatu isomorfisma (R,S)-modul, sehingga diperoleh $M \cong \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$. □

Jika (R,S)-modul M merupakan hasil tambah langsung internal dari (R,S)-submodul M_α di M untuk setiap $\alpha \in I$, maka M dinotasikan dengan $M = \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$. Lebih lanjut, diperoleh bahwa setiap elemen $x \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ dengan $x_\alpha \in M_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in I$ dan $x_\alpha = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I.

Kemudian, operasi penjumlahan dan pergandan skalar di dalam $M = \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha := \sum_{\alpha\in I} (x_\alpha + y_\alpha)$$

dan

$$r\left(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\right)s := \sum_{\alpha\in I} rx_\alpha s,$$

untuk setiap $\sum\limits_{\alpha\in I} x_\alpha, \sum\limits_{\alpha\in I} y_\alpha \in \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, $r \in R$, dan $s \in S$.

Contoh 1 Diberikan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul. Diketahui bahwa himpunan-himpunan $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| d \in \mathbb{Z} \right\}$, dan $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{Z} \right\}$ masing-masing merupakan $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul di $M_2(\mathbb{Z})$. Oleh karena diketahui $M_2(\mathbb{Z}) = K + L + J$, $K \cap L = 0$, $L \cap J = 0$, dan $K \cap J = 0$, maka diperoleh bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan hasil tambah langsung internal dari $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul K, L, dan J. Lebih lanjut, dinotasikan dengan $M_2(\mathbb{Z}) = K \oplus L \oplus J$.

Apabila diberikan M merupakan suatu (R,S)-modul serta M_1 dan M_2 masing-masing merupakan (R,S)-submodul di M, maka hasil tambah langsung internal dari (R,S)-submodul M_1 dan M_2 adalah $M = M_1 \oplus M_2$. Selanjutnya, berikut disajikan definisi penjumlahan langsung dari suatu (R,S)-modul M.

Definisi 5 *Diberikan suatu (R,S)-modul M serta M_1 dan M_2 masing-masing merupakan (R,S)-submodul di M. (R,S)-submodul M_1 disebut penjumlah langsung dari (R,S)-modul M jika terdapat (R,S)-submodul M_2 sedemikian sehingga memenuhi $M = M_1 \oplus M_2$.*

Contoh 2 Diberikan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul serta $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul K dan L di $M_2(\mathbb{Z})$ dengan $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ dan $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| d \in \mathbb{Z} \right\}$. Oleh karena diketahui $M_2(\mathbb{Z}) = K + L$ dan $K \cap L = 0$, maka diperoleh bahwa $M_2(\mathbb{Z}) = K \oplus L$. Dengan demikian, $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul K dan L masing-masing merupakan penjumlah langsung dari $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $M_2(\mathbb{Z})$.

III. PROYEKSI DARI (R,S)-MODUL

Apabila diberikan suatu (R,S)-modul M yang merupakan hasil tambah langsung internal dari (R,S)-submodul M_1 dan M_2, maka dapat didefinisikan suatu fungsi dari (R,S)-modul M ke M_1. Fungsi ini selanjutnya disebut proyeksi dari (R,S)-modul M pada M_1 di sepanjang M_2 jika memenuhi persyaratan tertentu.

Definisi 1 *Diberikan M merupakan (R,S)-modul memenuhi $M = K \oplus K'$ dengan K dan K' masing-masing merupakan (R,S)-submodul dari M. Proyeksi dari (R,S)-modul M pada K di sepanjang K' adalah suatu epimorfisma (R,S)-modul $P_K : M \longrightarrow K$ dengan definisi $P_K(a + b) = a$, untuk setiap $a \in K$ dan $b \in K'$.*

Sebelum membahas lebih jauh mengenai proyeksi, apabila diberikan suatu fungsi $f : A \longrightarrow B$ dan himpunan tak kosong $A' \subseteq A$ maka pembatasan fungsi f pada himpunan A', ditulis $(f|A')$, adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan A' ke himpunan $f(A') \subseteq B$.

Selanjutnya, apabila diberikan (R,S)-modul $M = K \oplus K'$ dan P_K merupakan proyeksi dari (R,S)-modul M pada K di sepanjang K', maka fungsi P_K ini tunggal.

Proposisi 1 *Jika diberikan (R,S)-modul $M = K \oplus K'$, maka proyeksi dari (R,S)-modul M pada K di sepanjang K' merupakan suatu epimorfisma tunggal $P_K : M \longrightarrow K$ dengan $(P_K|K) = 1_K$ dan $Ker(P_K) = K'$.*

Bukti. Berdasarkan Definisi 1, diketahui bahwa P_K merupakan suatu epimorfisma (R,S)-modul. Pertama akan ditunjukkan bahwa fungsi P_K memenuhi $(P_K|K) = 1_K$ dan $Ker(P_K) = K'$. Diketahui bahwa pembatasan fungsi P_K pada K, yaitu $(P_K|K)$, merupakan suatu fungsi dari K ke $P_K(K)$ dengan $(P_K|K)(k) = P_K(k) = k$ untuk setiap $k \in K$. Dengan demikian, diperoleh bahwa fungsi $(P_K|K)$ memetakan setiap elemen $k \in K$ ke elemen $k \in K$, sehingga fungsi $(P_K|K)$ tidak lain merupakan fungsi identitas dari K ke K, yaitu fungsi 1_K. Jadi diperoleh bahwa fungsi $(P_K|K) = 1_K$. Selanjutnya, diperoleh bahwa:

$$Ker(P_K) = \{k + k' \in M \mid P_K(k + k') = 0\} = \{k + k' \in M \mid k = 0\} = K'.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $Ker(P_K) = K'$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa fungsi P_K tunggal. Misalnya, diambil proyeksi dari M pada K di sepanjang K' adalah suatu epimorfisma (R,S)-modul $g : M \longrightarrow K$ yang memenuhi $(g|K) = 1_K$ dan $Ker(g) = K'$. Untuk setiap $k \in K$ dan $k' \in K'$ diperoleh:

$$g(k + k') = g(k) + g(k') = k + 0 = k = P_K(k + k').$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa fungsi $g = P_K$. Jadi terbukti bahwa proyeksi dari M pada K di sepanjang K' merupakan suatu epimorfisma tunggal $P_K : M \longrightarrow K$ dengan $(P_K|K) = 1_K$ dan $Ker(P_K) = K'$. □

Contoh 1 Diberikan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul serta $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul K dan L di $M_2(\mathbb{Z})$ dengan $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$ dan $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| d \in \mathbb{Z} \right\}$. Berdasarkan Contoh 2 diketahui bahwa $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $M_2(\mathbb{Z}) = K \oplus L$. Proyeksi dari $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $M_2(\mathbb{Z})$ pada K di sepanjang L adalah suatu epimorfisma $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $P_K : M_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow K$ dengan $P_K(k + l) = k$ untuk setiap $k \in K$ dan $l \in L$. Selanjutnya, proyeksi dari $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $M_2(\mathbb{Z})$ pada L di sepanjang K adalah suatu epimorfisma $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $P_L : M_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L$ dengan $P_L(k + l) = l$ untuk setiap $k \in K$ dan $l \in L$.

IV. KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Struktur (R,S)-modul merupakan generalisasi dari struktur (R,S)-bimodul. Pendefinisian hasil tambah langsung suatu (R,S)-modul dapat dilakukan dengan memperumum definisi hasil tambah langsung suatu modul. Bedanya, jika pada modul definisi operasi perkalian skalar pada himpunan hasil tambah langsungnya hanya dikenakan dari satu sisi saja, sedangkan jika pada (R,S)-modul operasi perkalian skalar pada himpunan hasil tambah langsungnya dikenakan pada kedua sisi secara bersamaan. Selain itu, pendefinisian proyeksi dari (R,S)-modul juga dapat digeneralisasi dari pendefinisian proyeksi suatu modul. Ketunggalan proyeksi dari suatu modul juga dipertahankan dalam proyeksi dari suatu (R,S)-modul. Lebih lanjut, hasil dari penelitian ini merupakan suatu hal mendasar terkait konsep (R,S)-modul. Oleh karena itu, hasil dari penelitian ini bisa sebagai rujukan dalam penelitian lanjutan terkait (R,S)-modul.

REFERENSI

[1] W. A. Adkins, *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag New York, Inc., USA, 1992.

[2] I.E. Wijayanti, S. Wahyuni, D.A. Yuwaningsih dan A.D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*, Yogyakarta: Gama Press UGM, 2016.

[3] T. Khumprapussorn, S. Pianskool dan M. Hall, (R, S)-Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematical Forum*, vol. 7, no. 33, pp. 1631-1643, 2012.

[4] D.A. Yuwaningsih, I.E. Wijayanti dan P.W. Prasetyo, On (R, S)-Modules Homomorphisms, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf.Series*, vol. 1188, pp. 012114, 2019.

[5] D.A. Yuwaningsih, Beberapa Sifat Radikal Prima-R Kiri pada (R, S)-Modul, *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 14, no.1, pp. 1-7, 2018.

[6] D.A. Yuwaningsih dan S. Inayati, Suatu Generalisasi (R, S)-Submodul Prima Gabungan, *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 14, no.2, pp. 99-104, 2018.

[7] D.A. Yuwaningsih, Some Properties of Left Weakly Jointly Prime (R, S)-Submodules, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 26, no.02, pp. 234-241, 2020.

[8] D.A. Yuwaningsih dan I.E. Wijayanti, On Jointly Prime Radical of (R, S)-Modules, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 21, no.1, pp. 25-34, 2015.