

LOGISTIC MODEL DEVELOPMENT OF COVID-19 SPREAD WITH PHYSICAL DISTANCING INTERVENTION

Okky Widya Arditya¹, Widowati Widowati^{2*}, Sutimin Sutimin³, R. Heru
Tjahjana⁴, Eka Triyana⁵

^{1,2,3,4,5} Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Mathematics, Diponegoro University, Indonesia
*Corresponding author email: widowati@lecturer.undip.ac.id

Abstract. In early 2020, covid-19 spread fast in the worldwide and cause the high death. The disease started from the Asian region which resulted in a viral pandemic in 2020. In order to anticipate the increasing of the cases, a strategy is needed to inhibit its transmission. The mathematical model approach is important tool for predicting of covid-19 spread in populations. In this paper we propose and analyze the dynamical behaviour of a developed logistic model by considering the effect of the contact patterns in reducing the covid-19 spread process. To verify the developed logistic model, numerical simulation was given with case study of covid-19 spread for patients under supervision in Central Java Province, Indonesia. Based on simulation results, it was found that physical distancing can reduce the growth of the covid-19 spread for patient under supervision. It can be seen from the number of covid-19 spread for patients under supervision with physical distancing intervention smaller compared to without physical distancing intervention.

Keywords: Covid-19, logistic model, physical distancing, stability

I. PENDAHULUAN

Coronavirus merupakan virus jenis baru yang ditemukan pada manusia yang telah bermutasi, keluarga besar virus ini dapat menyebabkan penyakit pada manusia dan hewan. Pada manusia penyakit ini dapat menyerang saluran pernafasan, mulai flu biasa hingga penyakit serius seperti Middle East Respiratory Syndrome (MERS) dan sindrom pernafasan akut berat/ Servere Acute Respiratory Syndrome (SARS). Virus ini pertama kali muncul di Wuhan Cina, pada Desember 2019 kemudian diberi nama Servere Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-COV2) sehingga megakibatkan Coronavirus Disease-2019 (COVID-19). Gejala yang ditimbulkan hamper sama dengan SARS yang muncul pada tahun 2003 di Guangdong Cina. Namun angka kematian SARS (9,6%) lebih tinggi dibanding COVID-19 (kurang dari 5%), walaupun jumlah kasus COVID-19 jauh lebih banyak dibanding SARS.

Model matematika menjadi alat yang esensial dalam mendiskripsikan dan menganalisis sistem dinamik [1] yang digunakan untuk memahami perilaku infeksi virus terhadap manusia dan untuk pengambilan kebijakan [2]. KermackMcKendrick membagi populasi total (N) menjadi empat kelas yaitu Susceptible($S(t)$) merupakan jumlah individu yang mudah terinfeksi

dan mudah ditulari penyakit, Exposed ($E(t)$) yang artinya individu yang terpapar virus, Infectious ($I(t)$) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan Recovered ($R(t)$) menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit .

Pada tahun 1838 Verhulst memperkenalkan model pertumbuhan logistik untuk menggambarkan pertumbuhan dalam suatu populasi yang ada batasnya [3] [4]. Model ini mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan. Pada titik jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama sehingga grafik fungsi akan mendekati konstan [5]. Konstruksi model pertumbuhan logistik dapat menunjukkan pertumbuhan dan penurunan jumlah kasus. Jika pada tahap awal kurva logistik konvergen maka pandemic dapat dikendalikan dan sebaliknya [6]. Pertumbuhan logistik menggunakan parameter yang diestimasi dengan metode non-linear least squares (NLS) untuk memodelkan dan menganalisis data time-series [7]

Model logistik yang dipengaruhi oleh awal jumlah populasi, laju pertumbuhan, dan daya tampung (carrying capacity) sebagai ukuran populasi maksimum yang dapat ditampung oleh suatu lingkungan tertentu tanpa ada penambahan atau penurunan ukuran populasi selama periode waktu relatif lama. Daya tampung yang disimbolkan dengan p , q adalah ciri lingkungan, dengan demikian daya tampung bervariasi terhadap waktu (t) dan ruang dengan berkelimpahan sumberdaya yang terbatas. Laju pertumbuhan penduduk akan terbatas akan ketersediaan makanan, tempat tinggal, dan sumber hidup lainnya.

Pertumbuhan logistik digunakan untuk memprediksi pertumbuhan jumlah total kasus positif, peningkatan harian, dan tingkat pertumbuhan harian yang dikonfirmasi positif. Untuk mengantisipasi peningkatan kasus, diperlukan strategi untuk menghambat pertumbuhan dan penyebarannya. Pendekatan model sistem dinamis sangat penting untuk memprediksi kondisi masa depan dari hasil simulasi serta skenario yang dapat dipilih. Tujuan dari p ini adalah untuk memodifikasi model matematis dengan mempertimbangkan orang dalam pemantauan, pasien dalam pengawasan di karantina menjadi variabel. Selain itu juga untuk mengevaluasi dan menganalisis perilaku jumlah maksimal kasus infeksi Covid-19 dengan intervensi jarak fisik, sehingga dapat dijadikan sebagai rekomendasi kepada pemerintah untuk pencegahan penyebaran infeksi Covid-19.

II. REVIEW MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK

Model pertumbuhan logistik atau disebut dengan model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik. Dalam model ini digunakan kaidah logistik untuk mengasumsikan bahwa pada masa tertentu banyaknya populasi akan mendekati titik kesetimbangan [8]. Model ini dapat memodelkan fenomena perubahan banyaknya populasi dalam persamaan diferensial, sehingga dianggap tepat untuk menggambarkan pertumbuhan jumlah kasus COVID-19 [9]. Berawal dari model pertumbuhan logistik klasik [10] [11], yang mempunyai bentuk persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (1)$$

dengan N adalah banyaknya populasi, K adalah *carrying capacity* yaitu ukuran maksimum dari populasi. Nilai r yaitu parameter yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi.

Solusi persamaan logistik dapat diperoleh melalui langkah sebagai berikut:

$$\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = rdt$$

$$\int \frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \int rdt$$

$$\frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{\left(1-\frac{N}{K}\right)} \quad (2)$$

Diperoleh $A_1 = 1$ dan $A_2 = \frac{1}{K}$ dengan mensubstitusikan ke persamaan (2) dan mengintegalkannya didapat

$$\ln|N| - \frac{1}{K} \ln\left|1 - \frac{N}{K}\right| = rt + C \quad (3)$$

Persamaan (3) memiliki syarat awal $N(0) = N_0$, sehingga didapat

$$C = \ln|N_0| - \frac{1}{K} \ln\left|1 - \frac{N_0}{K}\right| \quad (4)$$

Substitusi (4) ke (3) diperoleh

$$\ln N - \frac{1}{K} \ln\left|1 - \frac{N}{K}\right| = rt + \ln|N_0| - \frac{1}{K} \ln\left|1 - \frac{N_0}{K}\right|$$

$$\ln\left|\frac{N}{N_0}\right| + \frac{1}{K} \ln\left|\frac{1 - \frac{N_0}{K}}{1 - \frac{N}{K}}\right| = rt$$

Solusi khusus dari model logistik klasik adalah sebagai berikut:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Perkembangan berikutnya, berkaitan dengan model pertumbuhan logistik adalah model Ricards [12] yang secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (5),

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \left(\frac{N}{K}\right)^\beta\right) \quad (5)$$

$$N(t) = Ke^{-C(r-\gamma)} \left(\frac{(r-\gamma)}{-1 + re^{-\beta C(r-\gamma)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

(5)

dengan β merupakan koefisien penentu influksi dan $\beta > 0$, N adalah banyaknya populasi, r adalah laju pertumbuhan, dan K mempresentasikan *carrying capacity*. Telah diperoleh bahwa solusi khusus dari model pertumbuhan Richard [12] adalah

$$\frac{dN}{dt} = K \left(1 - e^{-r\beta t} \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{-\beta} \right) \right)^{-\frac{1}{\beta}} \text{ dengan syarat awal } N(0) = N_0.$$

III. PEMBAHASAN DAN HASIL

3.1 Pengembangan Model logistik Richard

Berikut diberikan pengembangan dari model logistik Richard (5) yang merupakan kebaruan dari model yang dikemukakan. Model ini merupakan pengembangan model logistik Richard dengan penambahan parameter yang berkaitan dengan intervensi *physical distancing* dengan persamaan seperti berikut.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^{\beta} \right) - \gamma N \text{ syarat awal } N(0) = N_0 \quad (6)$$

dengan $N(t) > 0; r, \beta, \gamma > 0$. N menyatakan banyak individu yang terinfeksi, γ merupakan parameter yang berkaitan dengan intervensi *physical distancing*.

Dapat diperoleh solusi umum dari persamaan (6) sebagai berikut:

$$N(t) = K e^{(t-C)(r-\gamma)} \left(\frac{(r-\gamma)}{-1 + r e^{-\beta(t-C)(r-\gamma)}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (7)$$

Substitusikan syarat awal ke solusi umum sebagai berikut.

$$N(0) = K e^{-C(r-\gamma)} \left(\frac{(r-\gamma)}{-1 + r e^{-\beta C(r-\gamma)}} \right)^{\frac{1}{\beta}} = N_0$$

$$K e^{-C(r-\gamma)} \left(\frac{(r-\gamma)}{-1 + r e^{-\beta C(r-\gamma)}} \right)^{\frac{1}{\beta}} = N_0$$

$$\begin{aligned}
 K^\beta e^{-C\beta(r-\gamma)} \frac{(r-\gamma)}{-1+re^{-\beta C(r-\gamma)}} &= (N_0)^\beta \\
 K^\beta e^{-C\beta(r-\gamma)} (r-\gamma) &= -(N_0)^\beta + (N_0)^\beta re^{-\beta C(r-\gamma)} \\
 rK^\beta e^{-C\beta(r-\gamma)} - \gamma K^\beta e^{-C\beta(r-\gamma)} - (N_0)^\beta re^{-\beta C(r-\gamma)} &= -(N_0)^\beta \\
 e^{-C\beta(r-\gamma)} (rK^\beta - \gamma K^\beta - (N_0)^\beta r) &= -(N_0)^\beta \\
 e^{-C\beta(r-\gamma)} &= \frac{-(N_0)^\beta}{(rK^\beta - \gamma K^\beta - (N_0)^\beta r)} \\
 \ln e^{-C\beta(r-\gamma)} &= \ln \left[\frac{-(N_0)^\beta}{(rK^\beta - \gamma K^\beta - (N_0)^\beta r)} \right]
 \end{aligned}$$

Dalam rangka penyederhanaan penulisan, misalkan $\mu = \frac{-(N_0)^\beta}{(rK^\beta - \gamma K^\beta - (N_0)^\beta r)}$, maka

$$\begin{aligned}
 \ln e^{-C\beta(r-\gamma)} &= \ln \mu \\
 -C\beta(r-\gamma) &= \ln \mu \\
 C &= -\left[\frac{\ln \mu}{\beta(r-\gamma)} \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

Selanjutnya dapat diperoleh solusi khusus dengan mensubstitusikan persamaan (8) ke persamaan (7):

$$N(t) = K \left(\frac{(\gamma-r)}{1-re^{\beta \left(t + \left[\frac{\ln \mu}{\beta(r-\gamma)} \right] (\gamma-r) \right)}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot e^{\beta \left(t + \left[\frac{\ln \mu}{\beta(r-\gamma)} \right] (\gamma-r) \right)} \tag{9}$$

Selanjutnya dapat diperoleh dua titik kesetimbangan dari persamaan (6) yaitu $N_1^* = 0$ (non endemik) dan $N_2^* = K \left(\frac{r-\gamma}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ (endemik)

3.2 Analisis kestabilan

Pada subbagian ini dipaparkan analisis kestabilan dari titik kestimbangan endemik $N_2^* = K \left(\frac{r-\gamma}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}}$. Proses linearisasi pada titik kestimbangan $N_2^* = K \left(\frac{r-\gamma}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ dengan

menggunakan deret Taylor orde satu, dari persamaan (6), $F = rN \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\beta \right) - \gamma N$

dipersekitaran titik kesetimbangan N_2^* sebagai berikut:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = F(N_2^*) + \frac{dF(N_2^*)}{dN} \bar{N} \quad \text{dengan } \bar{N} = N - N_2^*$$

Pada keadaan ini selalu berlaku $F(N_2^*) = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \frac{dF(N_2^*)}{dN} \bar{N} \tag{10}$$

dan didapat bentuk linier dari persamaan (10) yaitu

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \left[r \left(1 - \left(\frac{N_2^*}{K} \right)^\beta \right) - r \left(\frac{N_2^*}{K} \right)^\beta \beta - \gamma \right] \bar{N} \tag{11}$$

Selanjutnya diselidiki kestabilan dari model logistik (11) disekitar titik kesetimbangan

$N_2^* = K \left(\frac{-\gamma + r}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ sebagai berikut

$$\frac{dF(N_2^*)}{dN} = r \left(1 - \left(\frac{N_2^*}{K} \right)^\beta \right) - r \left(\frac{N_2^*}{K} \right)^\beta \beta - \gamma, \text{ dengan } N_2^* = K \left(\frac{-\gamma + r}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{12}$$

$$\frac{dF(N_2^*)}{dN} = \beta(\gamma - r)$$

$$\frac{dF(N_2^*)}{dN} < 0 \text{ jika } \gamma < r \text{ dan } \frac{dF(N_2^*)}{dN} > 0 \text{ jika } \gamma > r$$

Hal ini mengindikasikan bahwa bentuk linier pada persamaan (11) pada titik kestimbangan $N_2^* = K \left(\frac{-\gamma + r}{r} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ akan stabil jika $\gamma < r$. Hal ini berarti solusi/trayektory dari persamaan linier akan menuju ke titik kestimbangan N_2^* .

3.3 Simulasi Numerik

Pada bagian ini diberikan simulasi numerik sebagai verifikasi dari model persamaan logistik yang telah dikembangkan. Simulasi model berdasarkan data dari Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah pada bulan 27 Januari 2020 sampai dengan 6 April 2020. Data yg cukup banyak tersedia berkaitan dengan banyaknya pasien dalam pengawasan (PDP), sedangkan yang data banyaknya individu terinfeksi masih relative sedikit. Oleh karena itu dengan tidak mengurangi keumuman model logistic yang dikembangkan, berikut diberikan simulasi numerik dengan menggunakan data banyaknya PDP. Untuk penerapan model dengan data banyaknya individu terinfeksi dapat dilakukan dengan cara yang sama. Berikut diberikan simulasi numerik

pertumbuhan banyaknya pasien dalam pengawasan yang tidak melaksanakan *physical distancing* (tidak ada intervensi) dibandingkan dengan banyaknya pasien dalam pengawasan dengan intervensi *physical distancing* (diberi treatment), diperoleh persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dN_1}{dt} = 0.027N_1 \left(1 - \left(\frac{N_1}{1500} \right)^{0.15} \right) \quad (13)$$

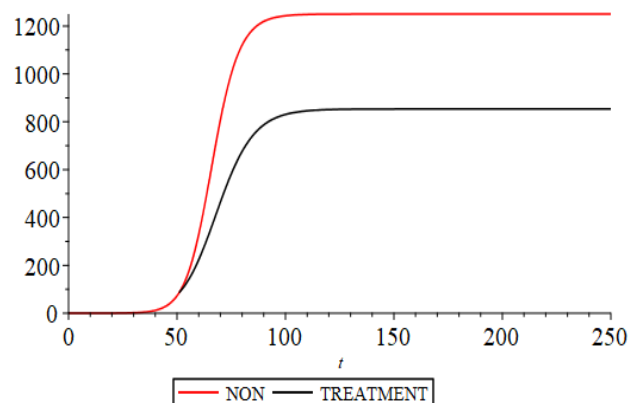
$$\frac{dN_2}{dt} = 0.19N_2 \left(1 - \left(\frac{N_2}{1250} \right)^{0.8} \right) - 0.005N_2 \quad (14)$$

dengan

N_1 : pasien dalam pengawasan yang tidak melaksanakan *physical distancing* dan

N_2 : banyaknya pasien dalam pengawasan yang melaksanakan *physical distancing*.

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan software Maple, untuk mengetahui adanya pengaruh intervensi *physical distancing* terhadap penyebaran covid-19.



Gambar 1. Pertumbuhan banyaknya pasien dalam pengawasan

Dari Gambar 1 terlihat bahwa pertumbuhan pasien dalam pengawasan antara individu yang menerapkan treatment (*physical distancing*) dan non-treatment. Hal ini mengindikasikan bahwa pertumbuhan pasien dalam pengawasan tanpa treatment akan bertambah seiring dengan bertambahnya waktu. Sedangkan pertumbuhan pasien dalam pengawasan dengan treatment akan mengalami penurunan mulai hari 50 dibandingkan dengan banyaknya pasien dalam pengawasan tanpa intervensi *physical distancing*.

IV. KESIMPULAN

Pengembangan model logistik Richard yang merepresentasikan penyebaran covid-19 dengan intervensi *physical distancing* telah dikemukakan. Jika turunan pertama dari model yang dikembangkan pada titik kestimbangan kurang dari nol, maka titik kesetimbangan tersebut stabil, artinya banyaknya pasien dalam pengawasan semakin lama semakin berkurang menuju titik kestimbangan. Dari hasil simulasi numerik diperoleh bahwa penerapan *physical*

distancing efektif untuk mengurangi penyebaran covid-19, hal ini terlihat dari banyaknya pasien dalam pengawasan dengan intervensi *physical distancing*, laju pertumbuhannya mengalami penurunan dibandingkan dengan pasien dalam pengawasan yang tidak melaksanakan *physical distancing*.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank Diponegoro University for funding this research through RPI Research Grant for the year 2020-2021.

REFERENCES

- [1] M. Adimy, A. Chekroun and C. P. Ferreira, "Global dynamics of a differential-difference system: a case of Kermack-McKendrick SIR model with age-structured protection phase," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 17, no. 2, p. 1329–1354, 2020.
- [2] A. Zeb, E. Alzahrani, V. S. Erturk and G. Zaman, "'Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class'" Hindawi 1 Volume 2020, Article ID 345240," *BioMed Research Internationa*, vol. 2020, 2020.
- [3] Kartono, Widowati, R. S. Utomo and R. H. Tjahjana, "Model Pertumbuhan Logistik Dengan Kontrol Optimal Penyebaran Demam Berdarah Dengue," *Jurnal Matematika*, vol. 18, no. 1, p. 7 – 12, 2015 .
- [4] T. N. Padilah, "Model Epidemii Sirs Dengan Pertumbuhan Logistik," *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, vol. 2, no. 1, 2017.
- [5] Abraham and Mahmudi, "Pemodelan Matematika Untuk Mensimulasikan Efek Populasi Karantina Terhadap Penyebaran Penyakit Hiv/Aids Di Papua," in *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNY*, Yogyakarta, 9 November 2013.
- [6] P. K. B. P. K. R. K. Minni Jain, "Modelling Logistic Growth Model for COVID-19 Pandemic in India," in *Proceedings of the Fifth International Conference on Communication and Electronics Systems (ICCES 2020) I*, Coimbatore, India, 2020.
- [7] C. Y. Shen, "Logistic growth modelling of COVID-19 proliferation in China and its international implications," *International Journal of Infectious Diseases*, vol. 96, p. 582–589, 2020.
- [8] H. M. Timuneno, R. H. S. Utomo and Widowati, "Model Pertumbuhan Logistik Dengan Waktu Tunda," *Jurnal Matematika*, vol. 11, no. 1, pp. 43-51, 2008.
- [9] E. Pelinovskya, A. Kurkina, O. Kurkina, M. Kokoulinea and A. Epifanovaa, "Logistic equation and COVID-19," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 140, 2020.
- [10] Widowati and sutimin, *Pemodelan Matematika Analisis dan Aplikasinya*, Semarang: Undip press, 2013.
- [11] Mukhsa, "Modifikasi Persamaan Logistik Pada Simulasi Laju Pertumbuhan Nyamuk *Aedes Aegypti*," *Jurnal Ilmiah Matematika Terapan*, vol. 6, no. 1, pp. 20-32, 2009.
- [12] A. Tsoularis, "Analysis of Logistic Growth Models," *Research Letters in the Information and Mathematical Sciences*, vol. 2, pp. 23-46, 2002.