JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 3 NO. 1 (JUN 2020)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

RELASI GREEN PADA GAMMA-SEMIGRUP SEMIGRUP YANG DIBANGKITKAN DARI SUATU SEMIGRUP

Y.D Sumanto[1*], Abdul Aziz[2], Solikhin[3], Robertus Heri SU[4]

[1,2,3,4]*Departemen Matematika, Universitas Diponegoro*
Email : [1]ydsumanto, [2]abdulaziz, [3]solikhin, [4]robertusherisoelisty[@lecturer.undip.ac.id]
[*]Penulis Korespondensi

Abstract. In the $\Gamma-$ semigroup generated from a semigroup, we can define some equivalence relations called the Green relation. Furthermore, we can examine the relationship between the Green relation on the $\Gamma-$ semigroup and the Green relation on its generating semigroup.

Keywords: $\Gamma-$semigroup, the Green relation, generating semigroup.

Abstrak. Pada $\Gamma-$semigroup yang dibangkitkan dari suatu semigrup, kita dapat mendefinisikan beberapa relasi ekuivalensi yang disebut relasi Green pada $\Gamma-$ semigrup. Selanjutnya kita dapat mengkaji keterkatitan antara relasi Green pada semigrup pembangkitnya.
Kata kunci: $\Gamma-$semigrup, relasi Green, semigrup pembangkit.

1. PENDAHULUAN

Di dalam [1] telah didefinisikan gagasan tentang $A-$semigrup yang merupakan generalisasi dari semigrup . Di dalam [2] telah dibahas relasi Green pada suatu semigrup dan beberapa aspek yang terkait. Dalam [3] telah ditunjukkan bahwa setiap semigrup dapat membangkitkan suatu $\Gamma-$semigrup. Sedangkan pembahasan tentang $\Gamma-$semigrup telah diawali dalam [4]. Di dalam [5] dibahas relasi Green pada $\Gamma-$semigrup untuk membangun adjoint semigrup dari suatu $\Gamma-$semigrup. Dalam jurnal ini, didefinisikan relasi Green pada semigrup yang dibangkitkan dari suatu semigrup dan dikaji keterkaitannya dengan relasi Green pada semigrup pembangkitnya.

2. RELASI GREEN PADA $\Gamma-$SEMIGRUP

Misalkan (S,α) suatu semigrup dengan elemen identitas. Relasi Green pada (S,α) didefinisikan dengan

$$xL_\alpha y \Leftrightarrow S\alpha x = S\alpha y$$
$$xR_\alpha y \Leftrightarrow x\alpha S = y\alpha S$$
$$xJ_\alpha y \Leftrightarrow S\alpha x\alpha S = S\alpha y\alpha S$$

dan

$$D_\alpha = L_\alpha \circ R_\alpha$$
$$H_\alpha = L_\alpha \bigcap R_\alpha$$

Relasi $L_\alpha, R_\alpha, J_\alpha D_\alpha$ dan H_α merupakan relasi ekuivalensi. Dalam [2] ditunjukkan bahwa setiap elemen $a \in S$ mendefinisikan operasi biner pada S dengan

$$\begin{aligned} x\alpha_a y &= (x\alpha a)\alpha y \\ &= x\alpha(a\alpha y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in S$.

Jika $\Gamma = \{\alpha_a \,|\, a \in S\}$ maka (S,Γ) merupakan $\Gamma-$semigup, yaitu $\Gamma-$semigrup yang dibangkitkan dari semigrup (S,α). Berikut didefinisikan relasi L_Γ, R_Γ dan J_Γ pada $\Gamma-$semigrup (S,Γ).

Definisi 2.1 *Misalkan* (S,Γ) *semigrup yang dibangkitkan dari semigrup* (S,α). *Pada* $\Gamma-$*semigrup* (S,Γ) *didefinisikan relasi* L_Γ, R_Γ *dan* J_Γ *sebagai berikut*

$$xL_\Gamma y \Leftrightarrow S\Gamma x = S\Gamma y$$
$$xR_\Gamma y \Leftrightarrow x\Gamma S = y\Gamma S$$
$$xJ_\Gamma y \Leftrightarrow S\Gamma x\Gamma S = S\Gamma y\Gamma S.$$

Pernyataan – pernyataan di bawah ini ekuivalen dengan Definisi 2.1:

$$xL_\Gamma y \Leftrightarrow (\exists p,q \in S \wedge \exists \gamma,\delta \in \Gamma)(x\gamma p = y\delta q)$$
$$xR_\Gamma y \Leftrightarrow (\exists p,q \in S \wedge \exists \gamma,\delta \in \Gamma)(p\gamma x = q\delta y)$$
$$xJ_\Gamma y \Leftrightarrow (\exists p,q,r,s \in S \wedge \exists \gamma,\delta,\mu,\nu \in \Gamma)(p\gamma x\delta q = r\mu y\nu s).$$

Teorema berikut mudah ditunjukkan bahwa L_Γ, R_Γ dan J_Γ merupakan relasi ekuivalensi.

Teorema 2.2 *Relasi* L_Γ, R_Γ *dan* J_Γ *pada* $\Gamma-$*semigrup* (S,Γ) *merupakan relasi ekuivalensi.*

Proposisi 2.3 *Relasi* L_Γ, R_Γ *dan* J_Γ *pada* $\Gamma-$*semigrup* (S,Γ) *memenuhi*

$$xL_\Gamma y \Leftrightarrow (\exists p,q \in S \wedge \exists \gamma,\delta \in \Gamma)(x = p\gamma y \wedge y = q\delta x)$$
$$xR_\Gamma y \Leftrightarrow (\exists p,q \in S \wedge \exists \gamma,\delta \in \Gamma)(y\gamma p \wedge y = q\delta x)$$
$$xJ_\Gamma y \Leftrightarrow (\exists p,q,r,s \in S \wedge \exists \gamma,\delta,\mu,\nu \in \Gamma)(x = p\gamma y\delta q \wedge y = r\mu x\nu s).$$

Bukti: Akan dibuktikan untuk L_Γ sedangkan yang lain dengan cara yang sama. Misalkan $xL_\Gamma y$ dari Definisi 2.1. maka $S\Gamma x = S\Gamma y$. Karena S memuat elemen identitas misalkan e maka

$y = e(\alpha e) y = e\alpha_e y \in S\Gamma y$. Ini berarti bahwa $y \in S\Gamma x$. Jadi ada $q \in S$ dan $\delta \in \Gamma$ sehingga $y = q\delta x$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan ada $p \in S$ dan $\gamma \in \Gamma$ sehingga $x = p\gamma y$. Sebaliknya misalkan ada $p,q \in S$ dan $\gamma,\delta \in \Gamma$ sedemikian sehingga $x = p\gamma y$, $y = q\delta x$, dan

$$\begin{aligned} S\Gamma x &= S\Gamma(p\gamma y) \\ &= (S\Gamma p)\gamma y \\ &\subseteq S\Gamma y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\Gamma y &= S\Gamma(q\delta x) \\ &= (S\Gamma q)\delta x \\ &\subseteq S\Gamma x. \end{aligned}$$

Jadi $S\Gamma x = S\Gamma y$ berarti $\alpha L_\Gamma y$. □

Relasi L_Γ, R_Γ dan J_Γ merupakan himpunan pasangan berurutan dari elemen – elemen S sebagai berikut.

$$L_\Gamma = \{(x,y) \in S \times S \mid \alpha L_\Gamma y\}$$
$$R_\Gamma = \{(x,y) \in S \times S \mid \alpha R_\Gamma y\}$$
$$J_\Gamma = \{(x,y) \in S \times S \mid \alpha J_\Gamma y\}$$

Komposisi antara L_Γ dan R_Γ .bersifat komutatif dan merupakan relasi ekuivalensi.

Proposisi 2.4 *Relasi* L_Γ *dan* R_Γ *memenuhi* $L_\Gamma \circ R_\Gamma = R_\Gamma \circ L_\Gamma$.

Bukti: Misalkan $(x,y) \in L_\Gamma \circ R_\Gamma$, maka ada $z \in S$ sehingga $(x,z) \in L_\Gamma$ dan $(z,y) \in R_\Gamma$. Menurut proposisi 2.3, maka terdapat $p,q,r,s \in S$ dan $\gamma,\delta,\mu,\nu \in \Gamma$ yang memenuhi $p\gamma x = z$, $q\delta z = x$, $r\mu z = y$ .dan $y\nu s = z$. Misalkan $z' = q\delta z\mu r$, diperoleh $x\mu r = q\delta z\mu r = z'$ dan

$$\begin{aligned} z'\nu s &= q\delta z\mu r\nu s \\ &= q\delta y\nu s \\ &= q\delta z \\ &= x. \end{aligned}$$

Ini berarti $(x,z') \in R_\Gamma$. Selanjutnya, $q\delta y = q\delta z\mu r = z'$.

$$\begin{aligned} p\gamma z' &= p\gamma q\delta z\mu r \\ &= p\gamma x\mu r \\ &= z\mu r \\ &= y. \end{aligned}$$

Berarti $(x,y) \in R_\Gamma \circ L_\Gamma$. Jadi diperoleh $L_\Gamma \circ R_\Gamma \subseteq R_\Gamma \circ L_\Gamma$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $R_\Gamma \circ L_\Gamma \subseteq L_\Gamma \circ R_\Gamma$. Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa

$L_\Gamma \circ R_\Gamma = R_\Gamma \circ L_\Gamma$. Selanjutnya mudah ditunjukkan bahwa $L_\Gamma \circ R_\Gamma$ merupakan relasi ekuivalensi, begitu juga irisan antara L_Γ dan R_Γ merupakan relasi ekuivalen dan misalkan

$$D_\Gamma = R_\Gamma \circ L_\Gamma$$
$$H_\Gamma = R_\Gamma \cap L_\Gamma. \square$$

Berikut ini diberikan teorema yang menggambarkan keterkaitan antara relasi pada (S,α) dengan relasi pada (S,Γ).

Teorema 2.5 *Jika* $xL_\alpha y, xR_\alpha y,$ *dan* $xJ_\alpha y$ *maka berturut – turut* $xL_\Gamma y, xR_\Gamma y,$ *dan* $xJ_\Gamma y$.

Bukti: Dibuktikan jika $xL_\alpha y$ maka $xL_\Gamma y$ sedangkan yang lain sejalan. Misalkan $xL_\alpha y$ maka $S\alpha x = S\alpha y$. Diambil sebarang $p\gamma x \in S\Gamma x$ maka ada $c \in S$ sehingga $\gamma = \alpha_c$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} p\gamma x &= p\alpha_c x \\ &= (p\alpha c)\alpha x \\ &= q\alpha x \in S\alpha x \\ &\subseteq S\alpha x \\ &= S\alpha y \\ &\subseteq S\Gamma y \end{aligned}$$

Jadi $p\gamma x \in S\Gamma y$ yang berarti $S\Gamma x \subseteq S\Gamma y$. Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh $S\Gamma y \subseteq S\Gamma x$ sehingga $S\Gamma y = S\Gamma x$. Dengan kata lain $xL_\Gamma y$.

Contoh 2.1 Diberikan $S = \{a,b,c,d,e,f\}$ dan operasi biner assosiatif α sebagai berikut.

α	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f
c	a	c	c	d	a	a
d	a	d	c	d	c	d
e	a	e	e	f	a	a
f	a	f	e	f	e	f

Dari sini diperoleh relasi L_α.

$$S\alpha a = \{a,b\} = S\alpha b$$
$$S\alpha c = \{a,c,e\} = S\alpha e$$
$$S\alpha d = \{a,d,f\} = S\alpha f.$$

Sehingga

$$L_\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(c,e),(e,c),(d,f),(f,d)\}$$

Kelas – kelas dari L_α adalah

$$L_a = \{x \in S \mid xL_\alpha a\} = \{a\}$$

$$L_b = \{x \in S \mid xL_\alpha b\} = \{b\}$$

$$L_c = \{x \in S \mid xL_\alpha c\} = \{c,e\} = L_e$$

$$L_d = \{x \in S \mid xL_\alpha d\} = \{d,f\} = L_f$$

dan $L = \{L_a, L_b, L_c, L_d\}$ sehingga

$$R_\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(c,d),(d,c),(e,f),f,e\}$$

Kelas – kelas dari R_α adalah

$$R_a = \{a\},\ R_b = \{b\},\ R_c = R_d = \{c,d\},\ R_e = R_f = \{e,f\}$$

dan $R = \{R_a, R_b, R_c, R_d\}$. Relasi J_α diperoleh dari

$$S\alpha a\alpha S = \{a\}, S\alpha b\alpha S = S\alpha c\alpha S = S\alpha d\alpha S = S\alpha e\alpha S = S\alpha f\alpha S = \{a,b,c,d,e,f\}$$

Sehingga

$$J_\alpha = \begin{Bmatrix} (a,a),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,b),(c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(d,b),(d,c), \\ (d,d),(d,e),(d,e),(e,b),(e,c),(e,d),(e,f),(f,b),(f,c),(f,d),(f,e),(f,f) \end{Bmatrix}$$

Kelas – kelas J_α adalah

$$J_a = \{a\},\ J_b = J_c = J_d = J_e = J_f = \{b,c,d,e,f\}$$

dan

$$J = \{J_a, J_b\}.$$

Sedangkan relasi

$$D_\alpha = R_\alpha \circ L_\alpha = J_\alpha$$

$$H_\alpha = R_\alpha \cap L_\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$$

Kelas – kelas H_α adalah

$$H = \{H_a, H_b, H_c, H_d, H_e, H_f\}$$

dimana setiap kelasnya adalah himpunan singleton. Selanjutnya untuk setiap $u \in S$ didefinisikan operasi biner α_u pada S dengan

$$x\alpha_u y = (x\alpha u)\alpha y = x\alpha(u\alpha y)$$

Sehingga diperoleh $\Gamma = \{\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d, \alpha_e, \alpha_f\}$ dimana $\alpha_b = \alpha$ dan untuk (S, α_a) merupakan semigrup nol dengan $x\alpha_a y = a$ untuk setiap $x, y \in S$. Sedangkan untuk $\alpha_c, \alpha_d, \alpha_e,$ dan α_f diberikan pada tabel berikut.

α_c	a	b	c	d	e	f
a	a	c	c	d	a	a
b	a	c	c	d	a	a
c	a	c	c	d	a	a
d	a	c	c	d	a	a
e	a	e	e	f	a	a
f	a	e	e	f	a	a

α_d	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	d	c	d	c	d
c	a	d	c	d	c	d
d	a	d	c	d	c	d
e	a	f	e	f	e	f
f	a	f	e	f	e	f

α_e	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	e	e	f	a	a
c	a	a	a	a	a	a
d	a	c	c	d	a	a
e	a	a	a	a	a	a
f	a	e	e	f	a	a

α_f	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	f	e	f	e	f
c	a	a	a	a	a	a
d	d	d	c	d	c	d
e	a	a	a	a	a	a
f	a	f	e	f	e	f

Selanjutnya relasi L_Γ diperoleh dari

$$S\Gamma a = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} S\gamma a = \{a\}$$

$$S\Gamma b = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} S\gamma b = S$$

$$S\Gamma c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} S\gamma c = \{a,c,e\} = S\Gamma e$$

$$S\Gamma d = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} S\gamma d = \{a,d,f\} = S\Gamma f$$

Sehingga diperoleh

$$L_\Gamma = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(c,e),(e,c),(d,f),(f,d)\}$$

Kelas – kelas dari L_Γ adalah

$L_a = \{a\}$, $L_b = \{b\}$, $L_c = L_e = \{c,e\}$, $L_d = L_f = \{d,f\}$,

dan

$L = \{L_a,\ L_b, L_c, L_d\}$.

Sedangkan relasi R_Γ diperoleh dari

$$a\Gamma S = \{a\}, b\Gamma S = S, c\Gamma S = d\Gamma S = \{a,c,d\}, e\Gamma S = f\Gamma S = \{a,e,f\}.$$

Sehingga diperoleh $R_\Gamma = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(c,d),(d,c),(e,f),(f,e)\}$.

Kelas – kelas dari R_Γ adalah

$R_a = \{a\}$, $R_b = \{b\}$, $R_c = R_d = \{c,d\}$, $R_e = R_f = \{e, f\}$,

dan

$R = \{R_a, R_b, R_c, R_d\}$.

Selanjutnya, relasi J_Γ diperoleh dari

$$S\Gamma a\Gamma S=\{a\},S\Gamma b\Gamma S=S\Gamma c\Gamma S=S\Gamma d\Gamma S=S\Gamma e\Gamma S=S\Gamma f\Gamma S=S.$$

Sehingga

$$J_\Gamma=\left\{\begin{matrix}(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),\\(c,b),(c,d),(c,e),(c,f),(d,b),(d,c),(d,e),(d,f),(e,b),(e,c),\\(e,d),(e,f),(f,b),(f,c),(f,d),(f,e)\end{matrix}\right\}.$$

Kelas – kelas dari J_Γ adalah

$J_a = \{a\}$, $J_b = J_c = J_d = J_e = J_f = \{b,c,d,e,f\}$, $J = \{J_a, J_b\}$

Selanjutnya, $D_\Gamma = R_\Gamma \circ L_\Gamma = J_\Gamma$ dan $H_\Gamma = R_\Gamma \cap L_\Gamma = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$.

Kelas – kelas dari H_Γ adalah

$H_a = \{a\}$, $H_b = \{b\}$, $H_c = \{c\}$, $H_d = \{d\}$, $H_e = \{e\}$, $H_f = \{f\}$,

dan

$H = \{H_a, H_b, H_c, H_d, H_e, H_f\}$.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa pada Γ – semigroup telah dapat didefinisikan relasi Green dan telah dapat ditunjukkan keterkaitan antara relasi Green pada Γ – semigrup dengan relasi Green pada semigrup pembangkitnya.

REFERENSI

[1] Sen, M.K., Saha, N.K., “On Γ–Semigroup,” *Bull. Calcuta Math. Soc*. Vol. 78, pp. 180 – 186, 1986.
[2] Howie, J.M., *Fundamental of Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
[3] Y.D Sumanto, “Grup–Γ Dual dari Suatu Grup–Γ,” *Jurnal Matematika*, Vol. 15, No 1, pp. 23 – 27, 2012.
[4] Sen, MK., “On Γ – Semigroup*,” Proc. Of International Conference On Algebra and it’s Application*, New Delhi, 1984.
[5] Pasko, E., “The adjoint Semigroup of a Γ – semigroup,” *Novi Sad J. Math*, Vol.17, no. 2 : pp. 31 – 39, 2017.