JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 3 NO. 1 (JUN 2020)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

KARAKTERISASI MODUL CYCLICALLY PURE (CP)-INJEKTIF

Nia Yulianti[1*], Hanni Garminia Y[2]

[1] *Politeknik Siber dan Sandi Negara*
[2] *Institut Teknologi Bandung*
Email: nia.yulianti@poltekssn.ac.id,

Abstract. This research deals with the structure of cyclically pure injective modules over a commutative ring R. If I be an ideal of R, proved that any CP-injective R/I-modul is also CP-injective as an R-module. The main result of research is the existance of CP-injective R-module if there is an R-module. More over, we deal characterization of CP-injective module which is related to proper essential ctclically pure extension. It is shown that R-modul D is cyclically pure injective if and only if D has no proper essential cyclically pure extension.
Keywords: exact sequence, CP-injective, essensial extension, direct summand, injective module

Abstrak. Penelitian ini membahas dan menyajikan mengenai struktur dari modul CP-injektif atas gelanggang komutatif R. Jika I adalah ideal dari R, ditunjukkan bahwa sebarang R/I-modul CP-injektif juga merupakan R-modul CP-injektif. Hasil utama penelitian ini adalah eksistensi dari R-modul CP injektif jika diketahui suatu R-modul. Lebih jauh lagi, dilakukan karakterisasi modul CP-injektif terkait dengan *essensial CP-extension* sejati. Akan ditunjukkan suatu R-modul D merupakan CP injektif jika dan hanya jika D tidak memiliki *essensial CP-extension* sejati.
Kata Kunci: barisan eksak, CP-injektif, *essential extension*, jumlah langsung, modul injektif.

I. PENDAHULUAN

Konsep modul pure injektif memiliki peranan penting pada Aljabar Komutatif. Aplikasi dari modul pure injektif juga diterapkan pada Teori Flat Covers [1]. Konsep modul cyclically pure injektif (CP-Injektif) merupakan salah satu generalisasi dari konsep modul pure injektif. L. Melkersson [2] mengkaji beberapa karakterisasi modul M yang dibangun secara hingga atas gelanggang lokal Noetherian yang pure pada setiap *CP-ekstension* dari M dengan memanfaatkan konsep CP-injektif.

Dalam penelitian matematika, biasanya suatu dugaan akan muncul dengan membandingkan sifat-sifat yang telah dihasilkan pada pengkajian lain dari objek yang serupa. Berdasarkan metode tersebut, merupakan suatu hal yang lumrah jika muncul kemungkinan pengembangan sifat modul CP-injektif terkait *CP-ekstension*. Khususnya, pengkajian terhadap permasalahan yang muncul dalam usaha menjawab apakah suatu modul CP-injektif jika dan hanya jika modul tersebut tidak memiliki *essential CP-ekstension* sejati.

Referensi yang menjadi rujukan utama yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Some Criteria of Cyclically Pure Injective Modules* yang ditulis oleh Kamran Divaani-Aazar, Mohammad Ali Esmkhani, dan Massoud Tousi (cetakan tahun 2005). Alur penulisan, cara pandang, dan pembuktian sifat-sifat dalam tesis ini disajikan dalam rumusan dan organisasi yang berbeda dari pustaka utama, dengan tujuan untuk memberikan inspirasi dan arahan yang lebih jelas bagi pengembangannya di teori modul.

II. KARAKTERISASI MODUL CP-INJEKTIF

2.1. HOMOMORFISMA DAN BARISAN EKSAK

Berdasarkan modul atas gelanggang R dan homomorfisma dari suatu R-modul maka dapat dibentuk suatu barisan yang disebut sebagai barisan eksak [3], dijelaskan pada definisi berikut ini

Definisi 1 [5] *Misalkan R adalah gelanggang dan $n \in \mathbb{N} \geq 3$. Barisan*

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} ... \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n$$

dengan $M_1, ..., M_n$ adalah R-modul dan homomorfisma R-modul $\varphi_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ untuk $i = 1, ..., n-1$ disebut eksak pada posisi ke $i \in 2, ..., n-1$ jika $im\varphi_{i-1} = ker\varphi_i$. Kemudian disebut barisan eksak jika eksak pada setiap posisi $i \in 2, ..., n-1$.

Definisi 2 [4] *Misalkan R adalah gelanggang dan A, B, C adalah suatu R-modul. Barisan eksak $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dikatakan CP jika pemetaan natural*

$$R/I \otimes_R A \longrightarrow R/I \otimes_R B$$

injektif untuk semua ideal I dari R yang dibangun secara hingga.

Barisan eksak-CP ini memegang peranan penting ketika akan mengkontrusi modul CP-injektif. Selain itu, juga diperlukan monomorfisma-CP yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3 [4] *Misalkan R adalah gelanggang dan A, B adalah suatu R-modul. R-monomorfisma $f : A \longrightarrow B$ dikatakan CP jika barisan eksak*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{nat} B/f(A) \longrightarrow 0$$

CP.

Selanjutnya definisi ini dipakai dalam mengkontruksi modul CP-injektif dan mengkarakterisasi modul CP-injektif terkait *essensial CP-extension* sejati.

2.2. Eksistensi Modul CP-Injektif

Setelah mengenal barisan eksak CP dan R-monomorfisma CP kita dapat mendefinisikan modul CP-injektif sebagai berikut.

Definisi 4 [4] *Misalkan R adalah suatu gelanggang. Suatu modul D atas R dikatakan CP-Injektif jika untuk sebarang barisan eksak CP*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0;$$

barisan terinduksi

$$0 \longrightarrow Hom_R(C, D) \longrightarrow Hom_R(B, D) \longrightarrow Hom_R(A, D) \longrightarrow 0$$

eksak.

Misalkan E_i adalah kelas dari R-modul maka $\prod_{i \in I} E_i$ merupakan R-modul injektif jika dan hanya jika E_i injektif untuk setiap $i \in I$ [7]. Dengan memanfaatkan hasil ini, bisa memperoleh kesimpulan yang analog untuk modul CP-injektif. Hal ini dibuktikan pada lemma berikut.

Lemma 1 [4] *Misalkan* $\{D_i\}_{i \in I}$ *adalah kelas dari* R*-modul. Maka* $\prod_{i \in I} D_i$ *adalah* CP*-Injektif* R*-modul jika dan hanya jika* D_i CP*-Injektif untuk semua* $i \in I$.

Misalkan R adalah gelanggang dan I adalah ideal dari R. Modul D dapat dipandang sebagai modul atas R jika D merupakan suatu modul atas R/I. Sebaliknya modul D dapat dipandang sebagai modul atas R/I jika D merupakan suatu modul atas R dengan $ID = 0$. Untuk lebih Jelasnya disajikan pada Lemma 2 berikut.

Lemma 2 [4] *Misalkan* R *adalah gelanggang,* I *adalah ideal dari* R*. modul* D *merupakan* R/I*-modul jika dan hanya jika* D *adalah suatu* R*-modul dengan* $ID = 0$.

Selanjutnya lemma tersebut dapat dimanfaatkan untuk mengkontruksi sifat yang analog terkait modul CP-injektif. Sebelumnya diberikan sifat eksistensi suatu R/I-homomorfisma jika diketahui suatu R-homomorfisma. Buktinya disajikan pada lemma berikut.

Lemma 3 *Misalkan* $f : N \longrightarrow M$ *adalah* R*-homomorfisma, maka terdapat suatu* R/I*-homomorfisma* $f' : N \longrightarrow M$.

Bukti. Definisikan

$$\begin{aligned} f' : N &\longrightarrow M \\ n &\longmapsto f(n). \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan f' adalah suatu R/I-homomorfisma.

1. Ambil sebarang $n_1, n_2 \in N_{R/I}$. Sehingga

$$\begin{aligned} f'(n_1 + n_2) &= f(n_1 + n_2); \\ &= f(n_1) + f(n_2); \\ &= f'(n_1) + f'(n_2). \end{aligned}$$

2. Ambil sebarang $r + I \in R/I$ dan $n \in N_{R/I}$. Sehingga

$$\begin{aligned}
f'((r+I).n) &= f((r+I).n);\ karena\ In = 0;\\
&= f(rn + In);\\
&= f(rn);\\
&= rf(n) + If(n);\ If(n) = 0;\\
&= (r+I)f'(n+In);\\
&= (r+I)f'(n).
\end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa f' merupakan suatu R/I-homomorfisma. □

Berikut diberikan suatu teorema yang menyatakan bahwa jika M adalah suatu modul CP-injektif atas gelanggang R/I maka M juga suatu modul CP-injektif atas gelanggang R.

Teorema 1 *Misalkan M adalah R/I-modul CP-injektif maka M adalah R-modul CP-injektif dengan I adalah ideal dari gelanggang R.*

Bukti. Akan ditunjukkan M adalah modul CP-injektif atas gelanggang R . Ambil sebarang barisan eksak

$$0 \longrightarrow A_R \xrightarrow{f} B_R \xrightarrow{g} C_R \longrightarrow 0.$$

Akan ditunjukkan

$$0 \longrightarrow Hom_R(C, M) \longrightarrow Hom_R(B, M) \longrightarrow Hom_R(A, M) \longrightarrow 0$$

eksak.
Diketahui M adalah R/I-modul CP-injektif. Akan ditunjukkan sebarang

$$0 \longrightarrow A_{R/I} \xrightarrow{f'} B_{R/I} \xrightarrow{g'} C_{R/I} \longrightarrow 0$$

eksak CP.

1. Akan ditunjukkan

$$0 \longrightarrow A_{R/I} \xrightarrow{f'} B_{R/I} \xrightarrow{g'} C_{R/I} \longrightarrow 0$$

merupakan barisan eksak.

(a) Akan ditunjukkan f' injektif. Ambil $x \in ker(f') \subseteq A_{R/I}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= f'(x);\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Sehingga $x \in ker(f') = 0$. Akibatnya $x = 0$ dan $ker(f') = 0$. Jadi terbukti f' injektif.

(b) Akan ditunjukkan g' surjektif. Ambil sebarang $c_1 \in C_R$. Karena g surjektif maka terdapat $b \in B_R$ sehingga $c_1 = g(b_R) = g'(b_{R/I})$. Jadi terbukti g' surjektif.

(c) Akan ditunjukkan $Imf' = kerg'$.

i. Akan ditunjukkan $imf' \subseteq kerg'$. Ambil $x \in imf'$ maka terdapat $y \in A_R/I$ sehingga $x = f'(y_{R/I}) = f(y_R) \in imf = kerg$. Sehingga

$$g(x_R) = 0;$$
$$g'(x_{R/I}) = 0.$$

Akibatnya $x \in kerg'$. Jadi $imf' \subseteq kerg'$.

ii. Akan ditunjukkan $kerg' \subseteq imf'$. Ambil $x \in kerg'$ maka $0 = g'(x_{R/I} = g(x_R))$. Akibatnya $x \in kerg = imf$ maka terdapat $y \in A_R$ sehingga, $x + f(y_R) = f'(y_{R/I}) \in imf'$. Jadi $kerg' \subseteq imf'$.

Jadi terbukti $imf' = kerg'$.

Jadi, terbukti $0 \longrightarrow A_{R/I} \xrightarrow{f'} B_{R/I} \xrightarrow{g'} C_{R/I} \longrightarrow 0$ merupakan barisan eksak.

2. Akan ditunjukkan barisan $0 \longrightarrow A_{R/I} \xrightarrow{f'} B_{R/I} \xrightarrow{g'} C_{R/I} \longrightarrow 0$ merupakan barisan eksak-CP.
Akan ditunjukkan pemetaan natural $h : R/I/a \otimes_{R/I} A_{R/I} \longrightarrow R/I/a \otimes_{R/I} B_{R/I}$ injektif untuk setiap ideal a dari R/I.Ambil $(\bar{r} + a) \otimes_{R/I} nkerh \subseteq R/I/a \otimes_{R/I} A_{R/I}$, maka

$$h((\bar{r} + a) \otimes_{R/I} t) = (a \otimes_{R/I} 0_B);$$
$$\bar{r_1} + a \otimes_{R/I} f'(t) = a \otimes_{R_I} 0_B.$$

Perhatikan bahwa $\bar{r_1} + a = a = 0_{R/I/a}$ dan $f'(t) = 0_B$.
Karena f' injektif, maka $t = 0_A$. Sehingga $\bar{r_1} + a \otimes_{R/b} t = a \otimes_{R/b} 0_A$. Jadi h injektif.
Terbukti barisan

$$0 \longrightarrow A_{R/I} \xrightarrow{f'} B_{R/I} \xrightarrow{g'} C_{R/I} \longrightarrow 0$$

merupakan barisan eksak-CP.

Diperoleh $0 \longrightarrow A_{R/I} \xrightarrow{f'} B_{R/I} \xrightarrow{g'} C_{R/I} \longrightarrow 0$ barisan eksak CP.
Maka barisan $0 \longrightarrow Hom_{R/I}(C, M) \xrightarrow{\rho'} Hom_{R/I}(B, M) \xrightarrow{\tau'} Hom_{R/I}(A, M) \longrightarrow 0$ eksak.

Selanjutnya akan ditunjukkan barisan

$$0 \longrightarrow Hom_R(C, M) \xrightarrow{\rho} Hom_R(B, M) \xrightarrow{\tau} Hom_R(A, M) \longrightarrow 0$$

eksak.

1. Akan ditunjukkan ρ injektif. Ambil $\phi \in ker\rho$ maka $\rho(\phi) = 0$. Untuk setiap $b \in B$, maka

$$\rho(\phi)(b) = 0;$$
$$\rho'(\phi')(b) = 0.$$

Sehingga $\phi' \in ker\rho'$. Karena ρ' injektif maka $\phi' = 0$, akibatnya $\phi = 0$. Sehingga $ker\rho = 0$. Jadi terbukti ρ injektif.

2. Akan ditunjukkan τ surjektif. Ambil sebarang $\sigma \in Hom_R(A, M)$. Karena τ' surjektif maka terdapat $\alpha \in Hom_{R/I}(B, M)$. Sehingga $\tau'(\alpha) = \sigma'$, $\sigma' \in Hom_{R/I}(A, M)$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\sigma((r+I)a) &= \sigma(ra + Ia);\\ &= \sigma(ra);\\ &= r.\sigma(a);\\ &= r.\sigma(a) + I\sigma(a);\\ &= (r+I)\sigma(a);\\ &= (r+I)\sigma'(a).\end{aligned}$$

Jadi, $\sigma = \sigma'$ Akibatnya $\sigma = \sigma' = \tau'(\alpha) = \tau(\alpha)$ dengan $\alpha \in Hom_R(B, M)$ Jadi terbukti τ surjektif.

3. Akan ditunjukkan $im\rho = ker\tau$.

    (a) Akan ditunjukkan $im\rho \subseteq ker\tau$. Ambil $\alpha \in im\rho$ maka $\exists\gamma \in Hom_R(C, M)$ sehingga

    $$\begin{aligned}\rho(\gamma) &= \alpha;\\ \rho'(\gamma) &= \alpha.\end{aligned}$$

    Perhatikan bahwa $\alpha \in im\rho' = ker\tau'$ sehingga $\tau'(\alpha) = 0$ dan $\tau(\alpha) = 0$. Akibatnya $\alpha \in ker\tau$. Jadi $im\rho \subseteq ker\tau$.

    (b) Akan ditunjukkan $ker\tau \subseteq im\rho$. Ambil $\alpha \in ker\tau$ maka

    $$\begin{aligned}\tau(\alpha) &= 0;\\ \tau'(\alpha) &= 0.\end{aligned}$$

    Sehingga $\alpha \in ker\tau' = im\rho'$ maka terdapat $\gamma \in Hom_(R/I)(B, M)$ sehingga $\alpha = \rho'(\gamma) = \rho(\gamma)$. Akibatnya $\alpha \in im\rho)$. Jadi $ker\tau \subseteq im\rho$.

    Jadi terbukti $Im\rho = Ker\tau$.

Jadi terbukti barisan $0 \longrightarrow Hom_R(C, M) \xrightarrow{\rho} Hom_R(B, M) \xrightarrow{\tau} Hom_R(A, M) \longrightarrow 0$ eksak. $\square$

Teorema berikut menjamin eksistensi modul CP-injektif jika diketahui suatu modul atas gelanggang R.

Teorema 2 *Jika M adalah suatu R-modul maka terdapat suatu CP-Injektif R-modul D.*

Bukti. Misalkan R^* menotasikan himpunan semua ideal R yang dibangun secara hingga yaitu $R^* = \{a \subseteq R |\ a$ ideal yang dibangun secara hingga$\}$.
Misalkan

$$D = Pi_{a \in R^*} E_{R/a}(M/aM)$$

dengan $E_{R/a}(M/aM)$ adalah injective envelope dari R/a-modul M/aM.

1. Diketahui $E_{R/a}(M/aM)$ adalah injective envelope R/a-modul M/aM.
   artinya pernyataan-pernyataan berikut ekivalen [8].
   (a) Maximal essential extension dari M/aM adalah $E_{R/a}(M/aM)$.
   (b) Minimal injective submodul dari $E' \supseteq E_{R/a}(M/aM)$ yang memuat M/aM adalah $E_{R/a}(M/aM)$.
   (c) Essential extension dari M adalah $E_{R/a}(M/aM)$ dan merupakan modul injektif.
2. Akan ditunjukkan M/aM adalah R/a-modul. Akan diperiksa apakah M/aM suatu R-modul. Ambil $r, s \in R$, $m + aM, n + aM \in M/aM$. Definisikan aksi R pada M/aM yaitu
$$r.(m + aM) = rm + aM$$
   (a) Akan ditunjukkan aksi tersebut well define. Misalkan $r = s$ dan $m = n$ sehingga
$$\begin{aligned} rm &= sn; \\ rm - sn &= 0 \in aM. \end{aligned}$$
   Akibatnya
$$\begin{aligned} rm + aM &= sn + aM; \\ r(m + aM) &= s(n + aM). \end{aligned}$$
   Jadi, terbukti aksinya well define.
   (b) Ambil sebarang $r, s \in R$ dan $m + aM, n + aM \in M/aM$ sehingga:
   i.
$$\begin{aligned} (rs)(m + aM) &= (rsm) + aM; \\ &= r(sm) + aM; \\ &= r(sm + aM). \end{aligned}$$
   ii.
$$\begin{aligned} r((m + aM) + (n + aM) &= r((m + n) + aM); \\ &= r(m + n) + aM; \\ &= rm + rn + aM; \\ &= (rm + aM) + (rn + aM); \\ &= (m + aM) + r(n + aM). \end{aligned}$$
   iii.
$$\begin{aligned} (r + s)((m + aM) &= (r + s)m + aM; \\ &= rm + sm + aM; \\ &= (rm + aM) + (sm + aM); \\ &= r(m + aM) + s(m + aM). \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}1.(m + aM) &= 1m + aM;\\ &= m + aM.\end{aligned}$$

Jadi, M/aM adalah R-modul.

Akibatnya, M/aM adalah R/a-modul.

Definisikan

$$\begin{aligned}\varphi : M &\longrightarrow D\\ &\longmapsto (x + aM)_a \in (R^*) \quad \forall x \in M\end{aligned}$$

1. Akan ditunjukkan φ adalah R-homomorfisma.

   (a) Ambil sebarang $x, x_1 \in M$ dan $r \in R$, maka

   $$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2) + aM;\\ &= (x_1 + aM) + \varphi(x_2 + aM);\\ &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2).\end{aligned}$$

   (b) Ambil sebarang $r \in R$ dan $x \in M$, maka

   $$\begin{aligned}\varphi(rx) &= rx + aM;\\ &= r(x + aM);\\ &= r\varphi(x).\end{aligned}$$

   Jadi φ adalah R-homomorfisma.

2. Akan ditunjukkan $E_{R/a}(M/aM)\,CP$ injektif R/a-modul. Ambil sebarang barisan $0 \longrightarrow A_{R/a} \xrightarrow{p} B_{R/a} \xrightarrow{q} C_{R/a} \longrightarrow 0\,CP$. Akan ditunjukkan $0 \longrightarrow Hom_R/a(C, E_{R/a}(M/aM)) \xrightarrow{f} Hom_{R/a}(B, E_{R/a}(M/aM)) \xrightarrow{g} Hom_R(A, E_{R/a}(M/aM)) \longrightarrow 0$ eksak.

   $$\begin{aligned}\psi : C &\longrightarrow E_{R/a}(M/aM)\\ f(\psi) : B &\longrightarrow E_{R/a}(M/aM)\end{aligned}$$

   $f(\psi) = \psi \circ q : B \longrightarrow E$

   (a) Akan ditunjukkan f injektif. Ambil $\psi \in ker(f) \subseteq Hom_{R/a}(C_B, E_{R/a}(M/aM))$, maka untuk setiap $b \in B$ dan $c \in C$

$$\begin{aligned}
f(\psi) &= 0_{Hom(B,E)};\\
f(\psi)b &= 0(b)\\
f(\psi)(b) &= 0_E;\\
(\psi \circ q)(b) &= 0_E;\\
(\psi)(q(b)) &= 0_E;\\
\psi(c) &= 0_E, karena\ q\ surjektif\ untuk\ setiap\ c \in C;\\
\psi &= 0_{Hom(C,E)}.
\end{aligned}$$

Sehingga $ker(f) = 0$. Jadi terbukti f injektif.

(b) Akan ditunjukkan g surjektif. Definisikan

$$\begin{aligned}
g : Hom_{R/a}(B, E_{R/a}(M/aM)) &\longrightarrow Hom_{R/a}(A, E_{R/a}(M/aM))\\
\tau &\longmapsto \tau_p
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan g pemetaan. Ambil sebarang $\tau_1 = \tau_2$. Karena p injektif dan $\tau_1 = \tau_2$ maka $g(\tau_1) = g(\tau_2)$. Jadi g pemetaan. Karena $E_{R/a}(M/aM)$ modul injektif artinya untuk setiap $\varphi \in Hom(A, E)$ terdapat θ sehingga $\varphi = \theta p$. Akibatnya terdapat $\theta \in Hom(B, E)$ sehingga $g(\theta) = \theta p = \varphi$. Jadi terbukti g' surjektif.

(c) Akan ditunjukkan $Imf = Kerg$

i. Akan ditunjukkan $Imf \subseteq Kerg$. Ambil $\theta \in Imf$. Akan ditunjukkan $\theta \in Kerg$. $\theta \in Imf$, maka terdapat $\psi \in Hom(C, E)$ sehingga

$$\begin{aligned}
f(\psi) &= \theta;\\
\psi q &= \theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \theta p;\\
&= \psi qp.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(\theta)(a) &= \psi qp(a);\\
&= \psi q(p(a)).
\end{aligned}$$

Karena $p(a) \in Imp = Kerq$ maka $qp(a) = 0$. Akibatnya $g(\theta)(a) = \psi 0 = 0$. Sehingga $\theta \in Kerg$. Jadi $Imf \subseteq Kerg$.

ii. Akan ditunjukkan $Kerg \subseteq Imf$. Ambil sebarang $\theta \in Kerg$. Akan ditunjukkan $\theta \in Imf$. Karena $E_{R/a}(M/aM)$ modul injektif, artinya untuk setiap $\theta \in Hom(B, E)$ terdapat ψ sehingga $\theta = \psi q$.
Perhatikan:

$$\begin{aligned}
f : Hom(C, E_{R/a}(M/aM)) &\longrightarrow Hom(B, E_{R/a}(M/aM))\\
\tau &\longmapsto \tau_q
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan f injektif.

$$\begin{aligned} f(\tau) &= 0; \\ \tau q &= 0; \\ \tau q(b) &= 0_b;\ untuk\ setiap\ b \in B; \\ \tau &= 0. \end{aligned}$$

Akibatnya f injektif sehingga $\theta \in Imf$. Jadi $Kerg \subseteq Imf$.

Jadi terbukti $Imf = Kerg$.

Jadi, $E_{R/a}(M/aM)$ merupakan CP-injektif R/a-modul.

Berdasarkan Lemma 1 $D = \prod_{a \in R^*} E_{R/a}(M/aM)$ juga CP-injektif R/a-modul dan berdasarkan Teorema 1 D adalah CP-injektif R-modul. □

2.3. Karakterisasi Modul CP-Injektif

Sebelumnya dijelaskan beberapa definisi dan sifat-sifat yang terkait untuk melakukan karakterisasi pada modul CP-injektif. Berikut didefinisikan

Definisi 5 [4] *Misalkan M adalah modul atas R dan N adalah submodul dari M. Submodul tak nol N disebut submodul essensial dari M, ditulis N ess_R M atau N ess M, jika dan hanya jika $X \cap N \neq 0$ untuk setiap X submodul tak nol dari M. Dalam hal ini M disebut essential extension dari N.*

Berikut diberikan beberapa contoh modul dan *essential extension*nya.

Contoh 1 Misalkan M sebarang modul atas R. Modul M adalah essential extension dari dirinya sendiri, ditulis ***M ess M***.

Contoh 2 Submodul $n\mathbb{Z}$ adalah submodul essensial dari $\mathbb{Z}$ untuk sebarang $0 \neq n \in \mathbb{Z}$.

Contoh 3 Misalkan R lapangan. Bentuk modul $R[X]$ atas $R[X]$. Didefinisikan himpunan $P_n[X] = \{a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + ... + a_mX^m | dengan\ n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \leq m, a_i \in R\ untuk\ i \in \{n, ..., m\}$ submodul atas $R[X]$. Sehingga $P_n[X]$ ess $R[X]$ untuk $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Salah satu sifat submodul *essensial* terkait dengan homomorfisma dijelaskan pada lemma berikut ini.

Lemma 4 *Diketahui M adalah R-modul dan N submodul M, submodul N adalah submodul essensial dari M maka untuk setiap R-modul L dan R-homomorfisma $\varphi : M \longrightarrow L$ berlaku jika $\varphi|_N$ injektif maka φ injektif*

Bukti. Misalkan M *essensial extension* dari N. Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang R-modul L, R-homomorfisma $\varphi : M \longrightarrow L$ injektif jika $\varphi|_N$ injektif. Diketahui $\varphi|_N$ injektif maka $Ker\varphi|_N = \{0\}$. Akan ditunjukkan $Ker\varphi \cap N = 0$. Ambil $a \in Ker\varphi \cap N$, maka $a \in Ker\varphi$, akibatnya $\varphi(a) = 0$.

Sementara itu, $a \in N$, akibatnya $\varphi|_N(a) = l \in L$. Karena $N \subset M$ maka $0 = \varphi(a) = \varphi|_N(a) = l$. Karena $\varphi|_N$ injektif haruslah $a = 0$. Akibatnya, $Ker\varphi \in N = 0$. Jelas $Ker\varphi$ submodul dari M. Karena M *essensial ekstention* dari N berlaku jika $Ker\varphi \cap N = 0$ maka $Ker\varphi = 0$. Akibatnya φ injektif.

□

Dengan memanfaatkan R-monomorfisma diperoleh definisi submodul-CP yang termuat dalam Definisi berikut.

Definisi 6 [4] ***Submodul*** *A dari R-modul B dikatakan CP jika pemetaan inklusi $A \hookrightarrow B$ adalah CP.*

Misalkan M adalah suatu R-modul dan N adalah suatu CP-submodul dari M. Modul M disebut *essensial CP-ekstension* dari N, jika tidak terdapat submodul taknol K dari M sehingga $K \cap N = 0$ dan $(K + N)/K$ adalah CP-submodul dari M/K.

Diketahui M adalah R-modul dan N submodul M, submodul N adalah submodul *essensial* dari M maka untuk setiap R-modul L dan R-homomorfisma $\varphi : M \longrightarrow L$ berlaku jika $\varphi|_N$ injektif maka φ injektif. Dengan konsep yang serupa, untuk *essensial CP-extension* kita peroleh sifat sebagai berikut.

Lemma 5 [4] *Misalkan N adalah CP-submodul dari R-modul M, modul M adalah essensial CP-extension dari N maka untuk setiap homomorfisma $\varphi : M \longrightarrow L$ sehingga $\varphi|N$ adalah CP-homomorfisma, maka φ injektif.*

Lemma 6 [4] *Misalkan N adalah CP-submodul dari R-modul M. Maka, terdapat submodul K dari M sehingga*

1. $K \cap N = 0$,
2. $(K + N)/K$ *adalah CP-submodul dari M/K,*

maka M/K adalah suatu CP-ekstension dari $(K + N)/K$.

Lemma 7 [4] *Misalkan $f : E \longrightarrow E'$ adalah suatu R-monomorfisma. Terdapat modul ekstent ion E'' dari E dan isomorfisma $g : E'' \longrightarrow E'$ yang memperluas homomorfisma f sehingga $g(e) = f(e)$ untuk setiap $e \in E$.*

Jika M adalah suatu R-modul maka terdapat suatu ekstension D dari M sehingga D bersifat CP-injektif dan D memuat M sebagai CP-submodul. Untuk buktinya dapat dilihat pada Lemma berikut ini.

Lemma 8 [4] *Misalkan M adalah R-modul. Terdapat suatu extension D dari M sehingga D bersifat CP-injektif dan D memuat M sebagai CP-submodul.*

Sekarang, akan disajikan karakterisasi dari modul CP-injektif terkait *essensial CP-extension* sejati. Akan ditunjukkan suatu R-modul D merupakan CP-injektif jika dan hanya jika D tidak memiliki *essensial CP-extension* sejati.

Teorema 3 *Misalkan D adalah R-modul. Maka pernyataan berikut ekivalen:*

1. *D adalah CP-injektif.*
2. *Untuk sebarang CP-monomorfisma $f : A \longrightarrow B$, setiap homomorfisma dari A ke D bisa diperluas menjadi homomorfisma dari B ke D.*
3. *Setiap barisan eksak CP $0 \longrightarrow D \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ splits.*
4. *D adalah jumlah langsung dari setiap R-modul L sehingga D adalah CP-submodul dari L.*
5. *D tidak memiliki esensial CP-ekstension sejati.*

Bukti. $(1 \longrightarrow 2)$
Diketahui D adalah CP-injektif. Karena $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B/f(A) \longrightarrow 0$ eksak CP, maka $0 \longrightarrow Hom(B/f(A), D) \xrightarrow{g'} Hom(B, D) \xrightarrow{f'} Hom(A, D) \longrightarrow 0$ eksak. Perhatikan bahwa untuk setiap $\tau \in Hom(A, D)$ dan karena f injektif maka dapat dibentuk

$$\begin{aligned} \sigma' : Im(f) &\longrightarrow D \\ b &\longmapsto \tau \circ f^{-1}(b). \end{aligned}$$

Karena $0 \longrightarrow Hom(B/f(A), D) \xrightarrow{g'} Hom(B, D) \xrightarrow{f'} Hom(A, D) \longrightarrow 0$ eksak, maka untuk sebarang $\tau \in Hom(A, D)$ terdapat $\sigma \in Hom(B, D)$. Sehingga $f'(\sigma) = \tau$. Perhatikan bahwa $\sigma' = \sigma|_{im(f)}$, artinya sebarang $Hom(A, D)$ dapat diperluas menjadi $hom(B, D)$.

$(2 \longrightarrow 3)$
Diberikan $f : A \longrightarrow B$ homomorfisma. Maka sebarang $Hom(A, D)$ dapat diperluas menjadi $Hom(B, D)$. Pandang

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

eksak CP. Sehingga $f : D \longrightarrow M$ adalah suatu CP-homomorfisma. Berdasarkan 2. dapat diperluas menjadi

$$\sigma : M \longrightarrow D$$

Karena τ pada, maka σ juga pada. Sehingga

$$\begin{aligned} \gamma :& M \longrightarrow D \oplus N \\ & m \longmapsto \sigma(m) \oplus g(m) \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan γ pada. Ambil sebarang $d \oplus n \in D \oplus N$. Karena σ pada maka $\exists m \in M$ sehingga $\sigma(m) = d$. Karena g pada maka $\exists m \in M$ sehingga $g(m) = n$. Sehingga $\gamma(m) = \sigma(m) \oplus g(m)$.

$(3 \longrightarrow 4)$
Karena $0 \longrightarrow D \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow)$ splits maka $M \cong D \oplus N$. D adalah CP-submodul dari R-modul L, maka $0 \longrightarrow D \xrightarrow{f} L \longrightarrow L/im\{f\} \longrightarrow 0$. Karena 3. maka

$$L \cong D \oplus L/im\{f\}.$$

Jadi, D adalah suku langsung dari L.

$(4 \longrightarrow 5)$
Misalkan M essensial CP ekstension dari D. Akibatnya tidak ada submodul tak nol K dari M sedemikian hingga $K \cap D = 0$ dan $K + D/K$ adalah CP-submodul dari M/K. Berdasarkan 4. $M = L + D$ dan $L \cap D = 0$. Perhatikan bahwa $L + D/L = M/L$. Karena M essensial CP dari D artinya jika $L \cap D = 0$ dan $L + D/L$ adalah CP submodul dari M/K maka haruslah $L = 0$. Jadi terbukti $D = M$.

$(5 \longrightarrow 4)$
Misalkan L adalah CP-*extension* sejati dari D. Berdasarkan Lemma 6 terdapat submodul K dari L sehingga $D + K/K$ adalah CP-submodul dari L/K. Dengan kata lain, L/K adalah CP- *extension* $D + K/K$ dengan $D \cap K = 0$. Tetapi D tidak punya *essensial* CP-ekstension sejati. Berarti $L = D$. Maka

$$\begin{aligned} K &= 0; \\ D + D &= L; \\ D \oplus K &= L. \end{aligned}$$

Jadi D adalah suku langsung dari setiap R-modul L sehingga D adalah CP-submodul dari L.

$(4 \longrightarrow 1)$
D CP-submodul dari L dan $L = D \oplus K$.
Berdasarkan Lemma 4. modul L adalah CP-injektif. Akibatnya berdasarkan Lemma 1 K dan D adalah CP-injektif. □

Pengkajian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa jika M adalah suatu R-modul maka terdapat suatu CP-Injektif R-modul D. Salah satu sifat dari modul CP-injektif jika dikaitkan dengan *essensial* CP-*extension* sejati adalah bahwa R-modul D merupakan CP-injektif jika dan hanya jika D tidak memiliki *essensial* CP-*ekstension* sejati.

III. KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Pada penelitian ini telah dilakukan kajian mengenai modul CP-Injektif meliputi pemetaan bilinear, hasilkali tensor, pemetaan natural, barisan eksak, barisan eksak cyclically pure, monomorfisma cyclically pure, submodul cyclically pure, pemetaan inklusi, dan modul injektif. Pengkajian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa jika M adalah suatu R-modul maka terdapat suatu CP-Injektif R-modul D.

Dalam penelitian ini penulis mengkaji salah satu karakterisasi dari modul CP-injektif yaitu suatu R-modul D merupakan CP-injektif jika dan hanya jika D tidak memiliki *essensial* CP-*ekstension* sejati. Penelitian lebih lanjut yang menarik untuk dilakukan adalah melakukan karakterisasi modul CP-injektif terkait dengan jumlah langsung dari modul-modul yang berbentuk $Hom_R(L, E)$ dengan E adalah R-modul injektif dan L adalah jumlah langsung dari family dari modul siklis yang dibangun secara hingga.

REFERENSI

[1] J.Xu, *Flat Covers of Modules, Lecture Notes in Math*. Berlin: Springer Vol 1634, 1996.

[2] L. Melkersson, "Small Cofinite Irreducibles", J. Algebra, 1997.

[3] D.S. Passman, *A Course In Ring Theory*. USA: AMS, 1991.

[4] K. Divaani-Aazar, M.A. Esmkhani, M.Tousi., "Some Criteria of Cyclically Pure Injective Modules", Proc. Amer. Math. Soc., in press, 2005.

[5] D.W. Sharpe, P. Vamos, *Injective Modules, Cambridge Tracts in Math*. Cambridge Univ. Press Vol. 62, 1972.

[6] K. Divaani-Aazar, M.A. Esmkhani, M.Tousi., "Two Characterizations of pure injective Modules", Proc. Amer. Math. Soc.,

[7] F.W. Anderson, K.R Fuller, *Rings and Categories of Modules*. New York: Springer, 1974.

[8] Herzog, Ivo, "Pure Injective Envelopes", Journal of Algebra and Its Applications Vol 02 No. 04, 2003.

[9] M. Prest, *Model Theory and Modules, Lecture Notes in Math*. London: Cambridge Univ Vol 130, 1988.

[10] Yokonuma, Takeo, *Tensor Spaces and Exterior ALgebra*. Providence: AMS, 1992.