JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 2 (NOV 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

NORMA OPERATOR PADA RUANG FUNGSI TERINTEGRAL DUNFORD

Solikhin[1], Susilo Hariyanto[1], YD Sumanto[1], Abdul Aziz[1]
[1]Departemen Matematika, FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedarto, S.H. Semarang, 50275
[1]*solikhin@live.undip.ac.id*

Abstract. We are discussed operator norms on spce of Dunford integral function. We show that for a function which Dunford integral, operator from dual space into space of Lebesgue integral is a bounded linear operator. Furthermore, sets of all bounded linear operator is a linear space and it is a normed space by norm certain. Finally, the distance function generated by the norm is metrix space.
Key word: Dunford integral, operator norms.

Abstrak. Artikel ini membahas operator pada ruang fungsi terintegral Dunford. Ditunjukkan bahwa untuk setiap fungsi yang terintegral Dunford, operator dari ruang dual ke ruang integral Lebesgue merupakan operator linear terbatas. Selanjutnya himpunan semua operator linear terbatas merupakan ruang linear dan dengan norma tertentu merupakan ruang bernorma. Lebih lanjut dengan fungsi jarak yang dibangkitkan dari normanya merupakan ruang metrik.
Kata kunci: Integral Dunford, norma operator.

I. PENDAHULUAN

Integral Lebesgue fungsi bernilai riil merupakan perluasan dari integral Riemann yang didefinisikan melalui fungsi sederhana pada sebarang himpunan terukur [1]. Integral Riemann terbatas pada fungsi yang terdefinisi pada selang tertutup. Padahal, pada teori mekanika kuantum, persamaan differensial atau teori probabilitas dihadapkan pada fungsi atas sebarang himpunan. Melalui integral Lebesgue ini, permasalahan-permasalahan yang tidak dapat ditangani oleh integral Rieman dapat terjawab. Salah satu keunggulan dari integral Lebesgue adalah dapat menangani suatu fungsi baik terbatas maupun tidak terbatas dan secara bersamaan dapat menangani suatu fungsi dengan domain atas himpunan yang lebih umum. Fakta lain bahwa struktur dari ruang fungsi yang terintegral Lebesgue merupakan ruang bernorma lengkap [2]. Hal inilah salah satu motivasi para peneliti untuk mengkajinya.

Kajian integral Lebesgue mengalami perkembangan. Integral Lebesgue digeneralisasi untuk mendefinisikan suatu integral lain. Misalnya seperti integral Dunford [3]. Integral Dunford didefinisikan dari suatu fungsi terukur $f:[a,b]\to X^*$ sedemikian untuk setiap x^* di ruang dual dari ruang Banach X, fungsi komposisi bernilai riil $x^*(f):[a,b]\to R$ adalah terintegral Lebesgue. Jadi, jika untuk setiap x^* di ruang dual dari ruang Banach X berfungsi bernilai riil $x^*(f)$ adalah terintegral Lebesgue, maka fungsi f terintegral Dunford. Pada pendefinisian integral Dunford, integral Lebesguenya juga telah digeneralisasi ke dalam integral Henstock seperti yang dikenal integral Henstock-Dunford [4].

Pada integral Dunford, jaminan eksistensi nilainya dijamin oleh Lemma Dunford. Melalui lemma tersebut dapat dikontruksi operator dan merupakan operator linear terbatas [3, 5]. Kemudian dikaji seminorma pada ruang fungsi terintegral Dunford [6]. Berdasarkan operator linear terbatas yang telah dibentuk, dibahas operator adjoint dan kompak lemah [7, 8]. Dihasilkan bahwa untuk setiap fungsi yang terintegral Dunford, operator linear terbatas kompak lemah jika dan hanya jika operator adjoint kompak lemah. Lebih lanjut kedua normanya sama. Berdasarkan operator linear terbatas yang dibentuk, didefinisikan suatu fungsi $\|.\|$ pada $B\left(X^*, L_1\right)$, himpunan semua operator linear terbatas dari ruang dual ke ruang fungsi terintegral Lebesgue. Ditunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan norma operator pada $B\left(X^*, L_1\right)$. Selanjutnya berdasarkan norma operator yang telah didefinisikan, dibentuk fungsi jarak ρ dan ditunjukkan bahwa $\left(B\left(X^*, L_1\right), \rho\right)$ merupakan ruang metrik.

II. RUANG METRIK DAN RUANG BERNORMA

Diberikan definisi ruang metrik dan ruang bernorma beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.1 [5] *Diberikan himpunan X tak kosong. Fungsi jarak $\rho: X \times X \to R$ dikatakan metrik pada X bila benar bahwa*

(i). $\rho\left(x_1, x_2\right) \geq 0$, *untuk setiap* x_1, x_2 *di* X ,

(ii). $\rho\left(x_1, x_2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$,

(iii). $\rho\left(x_1, x_2\right) = \rho\left(x_2, x_1\right)$, *untuk setiap* x_1, x_2 *di* X *dan*

(iv). $\rho\left(x_1, x_3\right) \leq \rho\left(x_1, x_2\right) + \rho\left(x_2, x_3\right)$, *untuk setiap* x_1, x_2, x_3 *di* X .

Pasangan $\left(X, \rho\right)$ disebut ruang metrik jika ρ adalah sebuah metrik pada X .

Definisi 2.2 [5] *Diberikan ruang linear X . Fungsi $\|\cdot\|: X \to R$ dikatakan norma pada X jika berlaku*

(i). $\|x_1\| \geq 0$, $\|x_1\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \theta$,

(ii). $\|ux_1\| = |u|\|x_1\|$, *dan*

(iii). $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$,

untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ *dan sebarang skalar* $u \in R$.

Himpunan X dilengkapi oleh norma $\|\cdot\|$, ditulis $\left(X, \|\cdot\|\right)$ dan disebut ruang bernorma.

Norma pada X dapat mendefinisikan sebuah metrik ρ pada X yang diberikan oleh

$$\rho\left(x_1, x_2\right) = \|x_1 - x_2\|,$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ dan disebut metrik yang diinduksi oleh norma [7].

III. INTEGRAL DUNFORD

Integral Dunford didefinisikan berdasarkan fungsi terukur lemah.

Definisi 3.1 [3] *Diketahui* X *ruang Banach. Fungsi terukur lemah* $f:[a,b]\to X$ *dikatakan terintegral Dunford pada* $[a,b]$, *jika untuk setiap* x^* *di* X^* *komposisi fungsi riil* $x^*(f)$ *terintegral Lebesgue pada* $[a,b]$, *dan untuk sebarang himpunan terukur* $E\subset[a,b]$ *terdapat vektort* $x^{**}_{(f,E)}\in X^{**}$ *sehingga*

$$x^{**}_{(f,E)}\left(x^*\right)=(L)\int_E x^*(f),$$

untuk setiap $x^*\in X^*$.

Nilai integral Dunford $(D)\int_E f$, fungsi f atas sebarang himpunan terukur $E\subset[a,b]$ diberikan oleh vektor $x^{**}_{(f,E)}\in X^{**}$, yaitu

$$x^{**}_{(f,E)}=(D)\int_E f .$$

Vektor ini adalah tunggal.

Teorema 3.2 [4] *Jika* f *terintegral Dunford pada* $[a,b]$, *maka untuk setiap himpunan terukur* $E\subset[a,b]$ *vektor* $x^{**}_{(f,E)}\in X^{**}$ *tunggal*.

Bukti: Diambil sebarang himpunan terukur $E\subset[a,b]$. Misalkan ada vektor $x^{**}_{(f,E)}\in X^{**}$ dan $z^{**}_{(f,E)}\in X^{**}$ maka

$$x^{**}_{(f,E)}\left(x^*\right)=(L)\int_E x^*(f) \text{ dan } z^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)=(L)\int_E x^*(f).$$

Lebih lanjut

$$x^{**}_{(f,E)}\left(x^*\right)-z^{**}_{(f,E)}\left(x^*\right)=(L)\int_E x^*(f)-(L)\int_E x^*(f)=0, \forall x^*\in X^*. \qquad \square$$

Contoh fungsi yang terintegral Dunford adalah fungsi konstan, fungsi kontinu, fungsi terbatas, fungsi terintegral Riemann, fungsi terintegral Lebesgue [4], atau fungsi yang terintegral McShane dan lain sebagainya.

Menurut Definisi 3.1 jelas bahwa jika suatu fungsi f adalah terintegral Dunford, maka untuk setiap x^* di X^* komposisi fungsi bernilai riil x^*f adalah terintegral Lebesgue, artinya jika untuk sebarang x^* di X^* fungsi bernilai riil x^*f terintegral Lebesgue, maka f terintegral Dunford.

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 2 (NOV 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

Teorema 3.3 *Fungsi* $f \in D[a,b]$ *bila dan hanya bila untuk setiap* $x^* \in X^*$, $x^* f \in L[a,b]$.

Bukti: Jelas menurut Definisi. □

Berdasarkan Definisi 3.1 dan Teorema 3.3, diperoleh bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral Dunford merupakan ruang linear, yaitu untuk setiap dua fungsi f dan g yang terintegral Dunford dan sebarang skalar $c \in R$ maka $f+g$ juga terintegral Dunford dan cf juga terintegral Dunford.

Teorema 3.4 *Koleksi semua fungsi yang terintegral Dunford,* $D[a,b]$ *merupakan ruang linear.*

Bukti: Koleksi $D[a,b]$ dikatakan ruang linear jika untuk setiap $f, g \in D[a,b]$ dan sebarang $u \in R$ berlaku $f+g \in D[a,b]$ dan $uf \in D[a,b]$.
Diambil sebarang $f, g \in D[a,b]$ dan sebarang skalar $u \in R$. Karena $f, g \in D[a,b]$, maka untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh $x^* f \in L[a,b]$ dan $x^* g \in L[a,b]$. Dengan demikian untuk setiap $x^* \in X^*$ didapatkan $x^*\left(f+g\right) \in L[a,b]$. Jadi, $f+g \in D[a,b]$.
Lebih lanjut, untuk sebarang skalar $u \in R$ dan untuk setiap x^* di X^* diperoleh fungsi $x^*\left(uf\right) \in L[a,b]$. Jadi, $uf \in D[a,b]$.
Jadi, $D[a,b]$ ruang linier. □

Teorema 3.5 *Jika* $f = \theta$ *hampir dimana-mana pada* $[a,b]$, *maka* $f \in D[a,b]$ *dan jika* $E \subset [a,b]$ *himpunan terukur maka*

$$x^{**}_{(f,E)} = \theta .$$

Bukti: Karena $f = \theta$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$, maka ada himpunan terukur $E \subset [a,b]$ dengan $\mu_\alpha(E) = 0$ sedemikian sehingga jika $x^* \in X^*$ berlaku

$$x^*\left(f(x)\right) = 0 \text{ untuk setiap } x \in [a,b] - E \text{ dan } x^*\left(f(x)\right) \neq 0 \text{ untuk setiap } x \in E .$$

Dibentuk $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ dengan $E_j = \left\{x \in E : j-1 \leq \left\| f\left(x\right)\right\| \leq j,\ j = 1, 2, 3, \ldots\right\} \subset E$ dan $\mu_\alpha(E_j) = 0$.
Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka untuk suatu k terdapat himpunan terbuka O_k dengan $\mu_\alpha\left(O_j\right) < \dfrac{\varepsilon}{j2^j}$ sehingga $O_j \supset E_j$.
Didefinisikan fungsi positif δ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga $N\left(x, \delta(x)\right) \subset O_j$ untuk $x \in E_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ dan sebarang fungsi positif δ untuk x yang lain.
Untuk setiap $E \subset [a,b]$ himpunan terukur berlaku

$$\left|\int_E x^*(f)-0\right|=\left|\int_{x\in E_j} x^*(f)+\int_{x\notin E_j} x^*(f)\right|=\left|\int_{x\in E_j} x^*(f)\right|<\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x^*\right\| j\frac{\varepsilon}{2^j k}=\varepsilon$$

untuk setiap $x^*\in X^*$ dan $\left\|x^*\right\|\le 1$.

Hal ini berarti $x^* f\in L[a,b]$ sehingga untuk setiap himpunan terukur $E\subset[a,b]$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,E)}\in X^{**}$ sehingga berlaku

$$x^{**}_{(f,E)}\left(x^*\right)=(L)\int_A x^* f=0.$$

Jadi $f\in D[a,b]$ dan $x^{**}_{(f,E)}=\theta$. □

IV. NORMA OPERATOR

Dua fungsi f dan h dikatakan ekuivalen, jika $f=g$ hampir dimana-mana pada $[a,b]$, yaitu terdapat $E\subset[a,b]$ himpunan terukur-α dengan $\mu_\alpha(E)=0$ sehingga berlaku

$$f(x)=h(x),$$

untuk setiap x di $[a,b]-E$.

Misalkan diberikan ruang Banach X dan X^* ruang dual dari X serta L_1. Untuk suatu fungsi f terintegral Dunford didefinisikan operator $T:X^*\to L_1$, oleh

$$T\left(x^*\right)=x^*(f),$$

untuk setiap x^* di X^*.

Telah ditunjukkan bahwa $T:X^*\to L_1$ merupakan operator linear terbatas [4].

Selanjutnya koleksi semua operator linear dan terbatas $T:X^*\to L_1$ dinotasikan dengan $B\left(X^*,L_1\right)$.

Teorema 3.6 *Koleksi semua operator linear terbatas* $B\left(X^*,L_1\right)$ *merupakan ruang linear*.

Bukti: Diambil sebarang $T_1,T_2\in B\left(X^*,L_1\right)$ dan sebarang skalar $c\in R$, maka berlaku $\left(T_1+T_2\right)\in B\left(X^*,L_1\right)$ dan $cT_1\in B\left(X^*,L_1\right)$, yaitu untuk sebarang $f\in D[a,b]$ dan $x^*\in X^*$

$$\left(T_1+T_2\right)\left(x^*\right)=x^*(f+g)=T_1\left(x^*\right)+T_2\left(x^*\right)$$

dan

$$\left(cT_1\right)\left(x^*\right)=x^*(cf)=cT_1\left(x^*\right).$$

Karena T_1 operator linear terbatas dan T_2 operator linear terbatas, maka jelas bahwa T_1+T_2 juga operator linear terbatas dan cT_1 operator linear terbatas. □

Selanjutnya didefinisikan fungsi dari himpunan semua operator linear terbatas ke himpunan bilangan riil.

Untuk suatu $f \in D[a,b]$ dan setiap $x^* \in X^*$ dapat didefinisikan fungsi $\|\cdot\| : B\left(X^*, L_1\right) \to R$ oleh

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\|Tx^*\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1\right\}\\ &= \sup\left\{\|x^* f\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f \in D[a,b]\right\}.\end{aligned}$$

Fungsi $\|\cdot\| : B\left(X^*, L_1\right) \to R$ merupakan norma, seperti yang diuraikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.7 $\left(B\left(X^*, L_1\right), \|.\|\right)$ *merupakan ruang bernorma dengan norma*

$$\|T\| = \sup\left\{\|x^* f\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{suatu } f \in D[a,b]\right\}.$$

Bukti:

Diambil sebarang $T, S \in B\left(X^*, L_1\right)$ dan sebarang skalar $c \in R$.

(N1) Jelas bahwa $\|T\| = \sup\left\{\|x^* f\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f \in D[a,b]\right\} \geq 0$.

$$\|T\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \theta.$$

(N2)
$$\begin{aligned}\|cT\| &= \sup\left\{\|cx^* f\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f \in D[a,b]\right\}\\ &= \sup\left\{|c|\|x^* f\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f \in D[a,b]\right\}\\ &= |c| \sup\left\{\|x^* f\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f \in D[a,b]\right\}\\ &= |c|\|T\|.\end{aligned}$$

(N3)
$$\begin{aligned}\|T+S\| &= \sup\left\{\|x^*\left(f+g\right)\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f, g \in D[a,b]\right\}\\ &= \sup\left\{\|x^* f + x^* g\| \,\middle|\, x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, \text{ suatu } f, g \in D[a,b]\right\}\end{aligned}$$

$$\leq \sup\left\{\left\|x^* f\right\| \middle| x^* \in X^*, \left\|x^*\right\| = 1, \text{ suatu } f \in D[a,b]\right\} +$$

$$\sup\left\{\left\|x^* g\right\| \middle| x^* \in X^*, \left\|x^*\right\| = 1, \text{ suatu } g \in D[a,b]\right\}$$

$$= \|T\| + \|S\|.$$

Jadi, $\left(B\left(X^*, L_1\right), \|.\|\right)$ merupakan ruang bernorma. □

Didefinisikan fungsi jarak ρ pada $B\left(X^*, L_1\right)$ oleh

$$\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\|$$

untuk setiap T_1 dan T_2 di $B\left(X^*, L_1\right)$.

Fungsi $\rho : B\left(X^*, L_1\right) \times B\left(X^*, L_1\right) \to R$ merupakan metrik pada $B\left(X^*, L_1\right)$.

Teorema 3.8 *Ruang linear* $B\left(X^*, L_1\right)$ *merupakan ruang metrik terhadap fungsi jarak*

$$\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\|,$$

untuk setiap T_1 *dan* T_2 *di* $B\left(X^*, L_1\right)$.

Bukti:

(1). Diambil sebarang dua operator linear terbatas T_1 dan T_2 di $B\left(X^*, L_1\right)$, diperoleh

$$\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\| \geq 0.$$

(2). Diambil sebarang dua operator linear terbatas T_1 dan T_2 di $B\left(X^*, L_1\right)$, diperoleh

$$\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\| = \|T_2 - T_1\| = \rho(T_2, T_1).$$

(3). Diambil sebarang tiga operator linear terbatas $T_1, T_2, T_3 \in B\left(X^*, L_1\right)$ diperoleh

$$\rho(T_1, T_3) = \|T_1 - T_3\| = \|T_1 - T_2 + T_2 - T_3\| \leq \|T_1 - T_2\| + \|T_2 - T_3\| = \rho(T_1, T_2) + \rho(T_2, T_3).$$

Jadi, fungsi jarak ρ merupakan metrik pada $B\left(X^*, L_1\right)$, artinya $\left(B\left(X^*, L_1\right), \rho\right)$ merupakan ruang metrik. □

V. PENUTUP

Koleksi semua fungsi yang terintegral Dunford merupakan ruang linear. Jika untuk setiap fungsi yang terintegral Dunford didefinisikan operator dari ruang dual ke ruang fungsi terintegral Lebesgue, maka operator tersebut merupakan operator linear terbatas. Selanjutnya koleksi semua operator linear terbatas merupakan ruang linear. Lebih lanjut, koleksi semua operator linear terbatas dengan suatu norma tertentu dan fungsi jarak yang dibangkitkan dari normanya merupakan ruang bernorma dan ruang metrik. Pada topik norma operator ini, perlu dikaji lebih lanjut apakah dengan norma operator tersebut merupakan ruang lengkap.

REFERENSI

[1] Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

[2] Gordon, R. A. (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.

[3] Schwabik, S. & Guoju, Ye. (2005), *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore.

[4] Guoju, Ye. & Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.

[5] Solikhin, dkk. (2018), Operator pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford, *Journal of Fundamental Mathematics and Application (JFMA)*, 2(1): 110, http://dx.doi.org/10.14710/jfma.v1i2.17

[6] Solikhin, dkk. (2018), Seminorma pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford, *Journal of Fundamental Mathematics and Application (JFMA)*, 2(1): 26-34, http://dx.doi.org/10.14710/jfma.v2i1.30

[7] Kreyszig, E. (1989), *Introductory Funtional Analysis with Applications*, John Willey & Sons, USA.

[8] Darmawijaya, S. (2007), *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.