JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 2 (NOV 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

RUANG BERNORMA PADA HIMPUNAN SEMUA FUNGSI TERDEKATI

Abdul Aziz[1)], Y.D Sumanto[2)], Solikhin[3)], Robertus Heri SU[4)]
Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl.Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang

Abstract. In this paper, we discuss that in the approachable functions set can be defined a complete norm. Furthermore, we obtained that all of approachable functions set is a Banach Space.

Keywords: Approachable function, complete norm space, Banach space.

Abstrak. Pada artikel ini, dikaji bahwa pada himpunan semua fungsi terdekati dapat didefinisikan norma yang lengkap. Selanjutnya diperoleh bahwa himpunan semua fungsi terdekati merupakan ruang Banach.

Kata kunci: Fungsi terdekati, ruang bernorma lengkap, ruang Banach

I. PENDAHULUAN

Pada artikel ini dibahas mengenai himpunan semua fungsi terdekati merupakan ruang Banach. Dalam [1] telah didefinisikan mengenai partisi bertanda $\delta-$fine pada $[a,b]$, dimana δ adalah suatu fungsi positif. Partisi bertanda $\delta-$fine merupakan bagian penting dalam mengkostruksikan fungsi sederhana – δ . Pada [3] telah didefinisikan mengenai fungsi sederhana – δ. Jika δ adalah suatu fungsi positif pada $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ dan $P_{\delta_\varepsilon}=\{([x_{i-1},x_i],t_i)|i=1,2,3,..,n\}$ partisi bertanda $\delta-$fine pada $[a,b]$ dan $c_1,c_2,....,c_n\in\mathbb{R}$, $\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)$ disebut fungsi sederhana – δ [3]. Selanjutnya fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dikatakan terdekati pada $[a,b]$ jika untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat fungsi positif δ_ε pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $P_{\delta_\varepsilon}=\{([x_{i-1},x_i],t_i)|i=1,2,3,..,n\}$ adalah partisi bertanda δ – fine maka terdapat fungsi sederhana – P_{δ_ε} $\varphi_{\delta_\varepsilon}$ pada $[a,b]$ sehingga $|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)|<\varepsilon$. Himpunan semua fungsi terdekati pada $[a,b]$ ditulis dengan $A[a,b]$. Dari [2] diperoleh bahwa $A[a,b]$ merupakan ruang linier. Pada [3] telah didefinisikan fungsi bervariasi terbatas. Lebih lanjut dalam [4] telah ditunjukkan bahwa suatu fungsi terdekati merupakan fungsi bervariasi terbatas.

http://dx.doi.org/10.14710/jfma.v2i2.37 p-ISSN: 2621-6019 e-ISSN: 2621-6035

Dalam [5] telah didefinisikan mengenai ruang bernorma maupun ruang Banach. Pada artikel ini, pada $A[a,b]$ didefinisikan suatu norma yang lengkap. Lebih lanjut, diperoleh bahwa $A[a,b]$ merupakan ruang Banach.

II. RUANG BERNORMA DARI FUNGSI - FUNGSI TERDEKATI

Berikut diberikan teorema yang menjelaskan bahwa himpunan semua fungsi terdekati pada $[a,b]$ merupakan ruang bernorma.

Teorema 2.1. *Diberikan* $A[a,b]$ *himpunan semua fungsi terdekati pada* $[a,b]$. *Jika pada* $A[a,b]$ *didefinisikan fungsi* $\|.\|: A[a,b] \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$\|f\| = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\delta_\varepsilon} \sup_{1\le i\le n} \left\{ |c_i| \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x) + c_n \chi_{[x_{n-1},x_n]}(x) \text{ fungsi sederhana} - \delta \\ \text{sehingga } \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x) - f(x)\right| < \varepsilon \text{ untuk setiap } x \in [a,b] \end{array} \right\}$$

maka $\|.\|$ *merupakan norma pada* $[a,b]$.

Bukti.

1. Jelas bahwa untuk setiap $f \in A[a,b]$ maka $\|f\| \ge 0$.
2. Jelas bahwa $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.
3. Misalkan $f \in A[a,b]$ maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_ε pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $P_{\delta_\varepsilon} = \{[x_{i-1},x_i],t_i \mid i = 1,2,3,..,n\}$ adalah partisi bertanda δ – fine maka ada fungsi sederhana $\varphi_{\delta_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x) + c_n \chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)$ pada $[a,b]$ sehingga $\left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$, dengan kata lain $\left|c_i - f(x)\right| < \varepsilon$ untuk semua $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n$.
4. Misalkan $f, g \in A[a,b]$ maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_ε pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $P_{\delta_\varepsilon} = \{[x_{i-1},x_i],t_i \mid i = 1,2,3,..,n\}$ adalah partisi bertanda δ – fine maka ada fungsi sederhana – δ $\varphi_{\delta_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x) + c_n \chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)$ dan $\phi_{\delta_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x) + d_n \chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)$ sehingga $\left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$,dan $\left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ untuk semua $x \in [a,b]$. Ini berakibat untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$ berlaku

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 2 (NOV 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

$$
\begin{aligned}
|c_i+d_i| &\le |c_i|+|d_i| \\
&= \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |c_i| \left| \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&+ \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |d_i| \left| \begin{array}{l} \phi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} d_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+d_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\phi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\}
\end{aligned}
$$

Sehingga untuk setiap fungsi positif δ_ε berlaku

$$
\begin{aligned}
|c_i+d_i| &\le |c_i|+|d_i| \\
&= \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |c_i| \left| \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&+ \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |d_i| \left| \begin{array}{l} \phi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} d_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+d_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\phi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\}
\end{aligned}
$$

Ini berakibat

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |c_i+d_i| \left| \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&\le \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |c_i| \left| \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&\quad + \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |d_i| \left| \begin{array}{l} \phi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} d_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+d_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\phi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\}
\end{aligned}
$$

Dengan kata lain,

$$
\begin{aligned}
\|f+g\| &\le \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |c_i| \left| \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&+ \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{ |d_i| \left| \begin{array}{l} \phi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} d_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+d_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ \textit{fungsi sederhana}-\delta \\ \textit{sehingga}\ \left|\phi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ \textit{untuk setiap}\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk setiap $\eta > 0$ ada $\varepsilon > 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &\le \sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{|c_i| \left| \begin{array}{l} \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+c_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ fungsi\ sederhana-\delta \\ sehingga\ \left|\varphi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ untuk\ setiap\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&\quad+\sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{|d_i| \left| \begin{array}{l} \phi_{\delta_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n-1} d_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+d_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x)\ fungsi\ sederhana-\delta \\ sehingga\ \left|\phi_{\delta_\varepsilon}(x)-f(x)\right|<\varepsilon\ untuk\ setiap\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\} \\
&\le \left(\|f\|+\frac{\eta}{2}\right)+\left(\|g\|+\frac{\eta}{2}\right) \\
&= \|f\|+\|g\|+\eta
\end{aligned}$$

Dari sini telah diperoleh bahwa $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$. Jadi $A[a,b]$ merupakan ruang bernorma.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa ruang bernorma $A[a,b]$ adalah lengkap.

Teorema 2.2. *Ruang bernorma* $A[a,b]$ *adalah lengkap.*

Bukti.

Diambil sebarang barisan Cauchy (f_n) pada $A[a,b]$. Untuk sebarang bilangan $\eta > 0$ ada bilangan asli N_η sehingga jika $m,n \ge N_\eta$ maka berlaku $\|f_n - f_m\| < \eta$. Dengan kata lain,

$$\inf_{\varepsilon>0}\sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{|c_{in}-c_{im}| \left| \begin{array}{l} \varphi_{n_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{in}\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)\ dan\ \varphi_{m_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{im}\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x) fungsi-\ fungsi\ sederhana-\delta \\ sehingga\ \left|\varphi_{n_\varepsilon}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon\ dan \left|\varphi_{m_\varepsilon}(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon\ untuk\ setiap\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\}<\eta$$

Ini berarti ada $\varepsilon > 0$ sehingga

$$\sup_{\delta_\varepsilon}\sup_{1\le i\le n}\left\{|c_{in}-c_{im}| \left| \begin{array}{l} \varphi_{n_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{in}\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)\ dan\ \varphi_{m_\varepsilon}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{im}\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x) fungsi-\ fungsi\ sederhana-\delta \\ sehingga\ \left|\varphi_{n_\varepsilon}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon\ dan \left|\varphi_{m_\varepsilon}(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon untuk\ setiap\ x\in[a,b] \end{array}\right.\right\}<\eta$$

Selanjutnya untuk sebarang δ_ε dan $1 \le i \le n$ memenuhi $|c_{in} - c_{im}| < \eta$ atau untuk setiap δ_ε diperoleh $\left\|\varphi_{n_\varepsilon}(x)-\phi_{m_\varepsilon}(x)\right\|<\eta$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x)-f_m(x)\right| &\le \left|f_n(x)-\varphi_{n_\varepsilon}(x)\right|+\left|\varphi_{n_\varepsilon}(x)-\varphi_{m_\varepsilon}(x)\right|+\left|\varphi_{m_\varepsilon}(x)-f_m(x)\right| \\
&< \varepsilon+\eta+\varepsilon
\end{aligned}$$

Karena ε dan η berlaku sebarang maka $\left(f_n(x)\right)$ merupakan barisan Cauchy bilangan riil yang berarti $\left(f_n(x)\right)$ konvergen ke suatu bilangan $f(x)$, untuk setiap $x \in [a,b]$. Selanjutnya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli N_ε dan fungsi positif δ_ε sehingga jika $n \geq N_\varepsilon$ memenuhi $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $x \in [a,b]$ dan jika $\varphi_{\delta_\varepsilon}$ fungsi sederhana – δ memenuhi $\left|f_n(x) - \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya diperoleh

$$\left|f(x) - \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)\right| \leq \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - \varphi_{\delta_\varepsilon}(x)\right| < \varepsilon .$$

III. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa himpunan semua fungsi terdekati merupakan ruang Banach.

REFERENSI

[1] Lee Peng Yee, (1989). Lanzhou Lecture on Henstock Integration. World Scientific, Singapore.

[2] A. Aziz, S. Hariyanto, Y.D.Sumanto, Solikhin. (2018). Fungsi Terdekati dan Sifat – Sifatnya. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, vol. 1, no. 2, pp.122 – 127.

[3] Gordon, Russel. A, (1994). The Integrand of Lebesgue Denjoy, Perron, and Henstock. American Mathematical Society, USA.

[4] A. Aziz, Y.D.Sumanto, Solikhin, Robertus Heri SU. (2019). Beberapa Karakteristik Baru pada Fungsi Terdekati. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, vol.2, no. 1, pp.22 – 25.

[5] Kreyszigm Erwin, (1978). Introductory Functional Analysis with Application, John Willey & Sons, Canada.