JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 1 (Jun 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

BEBERAPA KARAKTERISTIK BARU PADA FUNGSI TERDEKATI

Abdul Aziz[1*], Y.D Sumanto[1], Solikhin[1], Roberus Heri SU.[1]

[1]*Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro*
Jl.Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang
*Corresponding Author's Email : abdul_aziz01@yahoo.com

Abstract. In this paper, discuss the relationship between approachable function with bounded variations, measurement, and absolute continuity. Futhermore, If f is approachable function of interval [*a, b*] then f is a bounded variation function and f is a measurable function of interval [*a, b*]. In relation with absolute continuity, if f is an absolute continuous of interval [*a, b*] then f is approachable function of [*a, b*].
Keywords: Bounded Variation, absolute continuity, approachable function.

Abstrak. Pada artikel ini, digali keterkaitan antara fungsi terdekati dengan variasi terbatas, keterukuran, dan kekontinuan absolut. Selanjutnya diperoleh bahwa jika f adalah fungsi terdekati pada [*a*,*b*] maka f bervariasi terbatas dan terukur pada [*a*, *b*]. Dalam kaitannya dengan kekontinuan absolut diperoleh bahwa jika f adalah fungsi yang kontinu absolute pada [*a*,*b*] maka f adalah fungsi terdekati pada [*a*,*b*].
Kata kunci: Variasi terbatas, kekontinuan absolute, fungsi terdekati.

I. PENDAHULUAN

Di dalam [1] telah didefinisikan mengenai fungsi terdekati dan telah dibahas beberapa sifat yang berlaku. Dalam artikel ini, digali beberapa karakteristik dari fungsi terdekati yang dalam hal ini ditinjau dari keterkaitan antara fungsi terdekati dengan variasi terbatas, keterukuran, dan kekontinuan absolut. Seperti diketahui bahwa fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dikatakan mempunyai variasi terbatas jika $V\left(f,[a,b]\right)=sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(d_i\right)-f\left(c_i\right)\right|\right\}<\infty$ dimana supremum diambil dari semua partisi tak tumpang tindih $\left\{[c_i.d_i]\middle|i=1,2,3,..,n\right\}$ yang mungkin pada $[a,b]$ [2]. Misalkan E adalah himpunan terukur (Lebesgue), fungsi $f:E\to\mathbb{R}$ dikatakan terukur (Lebesgue) jika untuk setiap interval $I\subseteq\mathbb{R}, f^{-1}\left(I\right)=\left\{x\in E\middle|f\left(x\right)\in I\right\}$ adalah himpunan terukur [3]. Selanjutnya, fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dikatakan kontinu absolut pada $E\subseteq[a,b]$ jika untuk sebarang $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $P=\left\{[c_i,d_i]\middle|i=1,2,3,...,n\right\}$ adalah koleksi berhingga interval – interval tak tumpang tindih dengan $c_i,d_i\in E$ untuk $i=1,2,3,...,n$ dan $\sum_{i=1}^{n}\left|c_i-d_i\right|<\delta$ maka

$\sum_{i=1}^{n}\left| f\left(d_i\right)- f\left(c_i\right)\right| < \varepsilon$ [4]. Dalam hal ini, untuk δ fungsi positif pada $\left[a,b\right]$, $t_i \in \left[a,b\right]$ dan $t_i \in \left[x_{i-1},x_i\right] \subset \left(t_i - \delta\left(t_i\right), t_i + \delta\left(t_i\right)\right)$, $i = 1,2,3,...,n$ dan $\bigcup_{i=1}^{n}\left[x_{i-1},x_i\right] = \left[a,b\right]$ untuk $P = \left\{\left(t_i,\left[x_{i-1},x_i\right]\right) \middle| i = 1,2,3,...,n\right\}$ disebut partisi bertanda $\delta -$ fine pada $\left[a,b\right]$ [5]. Pada artikel ini, penulis menggali keterkaitan antara fungsi terdekati dengan variasi terbatas, keterukuran, dan kekontinuan absolut.

II. BEBERAPA KARAKTERISTIK DARI FUNGSI TERDEKATI

Berikut dibahas keterkaitan antara fungsi terdekati dengan variasi terbatas.

Teorema 2.1. *Diberikan fungsi* $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$. *Jika f adalah fungsi terdekati pada* $\left[a,b\right]$ *maka f bervariasi terbatas pada* $\left[a,b\right]$.

Bukti:
Diambil sebarang partisi $P = \left\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\right\}$ pada $\left[a,b\right]$. Karena *f* adalah fungsi terdekati pada $\left[a,b\right]$ maka *f* terdekati pada setiap interval $\left[x_{i-1},x_i\right]$ untuk *i* = 1, 2, 3, …, n. Selanjutnya diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat fungsi positif δ_i pada $\left[x_{i-1},x_i\right]$ sehingga jika $P_i = \left\{\left(\left[y_{ij-1},y_{ij}\right],t_{ij}\right) \middle| i,j = 1,2,3,...,n\right\}$ maka terdapat fungsi sederhana $\varphi_i\left(x\right) = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\chi_{\left[y_{ij-1},y_{ij},\right]}\left(x\right)$ sehingga $\left| f\left(x\right) - \varphi_i\left(x\right)\right| < \varepsilon$ untuk setiap $x \in \left[x_{i-1},x_i\right]$ dengan i = 1,2,3,…,n. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\left| f\left(x_i\right)- f\left(x_{i-1}\right)\right| &\le \sum_{j=1}^{m_i}\left| f\left(y_{ij}\right)- f\left(y_{ij-1}\right)\right| \\
&\le \sum_{j=1}^{m_i}\left| f\left(y_{ij}\right) - c_{ij}\right| + \sum_{j=1}^{m_i}\left|c_{ij} - c_{ij-1}\right| + \sum_{j=1}^{m_i}\left|c_{ij-1} - f\left(y_{ij-1}\right)\right| \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \sum_{j=1}^{m_i}\left|c_{ij} - c_{ij-1}\right| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left| f\left(x_i\right)- f\left(x_{i-1}\right)\right| &\le 2n\varepsilon + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\left|c_{ij} - c_{ij-1}\right| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Karena partisi $P = \left\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\right\}$ diambil sebarang pada $\left[a,b\right]$ maka

$$V\left(f,\left[a,b\right]\right) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left| f\left(x_i\right)- f\left(x_{i-1}\right)\right|\right\} < \infty$$

Jadi fungsi *f* bervariasi terbatas pada $\left[a,b\right]$.

Dibawah ini dibahas hubungan antara fungsi terdekati dengan keterukuran.

Teorema 2.2. *Jika* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *adalah fungsi terdekati pada* $[a,b]$ *maka f adalah fungsi terukur pada* $[a,b]$.

Bukti:
Misalkan *f* adalah fungsi terdekati pada $[a,b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $P=\{[x_{i-1},x_i],t_i \mid i=1,2,3,..,n\}$ maka terdapat fungsi sederhana $-\delta$ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)$ sehingga $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ untuk setiap $x\in[a,b]$. Sehingga untuk sebarang interval *I*,

$$\begin{aligned} f^{-1}(I) &= \{x \mid f(x)\in I\} \\ &\subseteq \bigcup_{c_i\in I}[x_{i-1},x_i] \end{aligned}$$

Dari sini terbukti bahwa *f* adalah fungsi terukur pada $[a,b]$.

Berikut dibahas keterkaitan antara fungsi terdekati dengan kekontinuan absolut.

Teorema 2.3. *Jika* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *kontinu absolut pada* $[a,b]$ *maka f adalah fungsi terdekati pada* $[a,b]$.

Bukti:
Perhatikan bahwa jika f kontinu absolut pada $[a,b]$ maka *f* kontinu pada $[a,b]$. Menurut [5], dapat disimpulkan bahwa maka *f* adalah fungsi terdekati pada $[a,b]$.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi terdekati pada himpunan kompak dapat didefinsikan menggunakan fungsi sederhana - P_δ. Selanjutnya, dari definisi di atas diperoleh beberapa sifat diantaranya fungsi terukur, fungsi kontinu, dan fungsi terbatas semuanya merupakan fungsi terdekati dan ruang fungsi tersebut merupakan ruang linier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Aziz, S. Hariyanto, Y.D.Sumanto, Solikhin. (2018). Fungsi Terdekati dan Sifat – Sifatnya. JFMA, vol.1, no. 2, pp.122 – 127.
[2] Gordon, Russel. A, (1994). The Integrand of Lebesgue Denjoy, Perron, and Henstock. American Mathematical Society, USA.
[3] Kopp, E. & Capinski, M. (2004). Measure, Integral and Probability second edition. Springer-Verlag, London.

[4] Lee Peng Yee, (1989). Lanzhou Lecture on Henstock Integration. World Scientific, Singapore.
[5] Pfeffer, W.F., (1993). The Riemann Approach to Integration. Cambridge University Press, New York.