JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 1 (Jun 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

PENYELESAIAN NUMERIK MODEL PREDATOR-PREY DENGAN SKEMA BEDA HINGGA TAK-STANDAR

Rina Reorita[1], Renny[2]

[1,2]*Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman*
Email : [1]rina.reorita@unsoed.ac.id

Abstract. Interaction between predator and prey can be represented as a system of non-linear differential equation which is difficult to be solved analytically. In this research, a predator-prey model with an addition of harvesting factor is discretized into a system of difference equation using non-standard finite difference scheme. The analysis result shows that the developed scheme has qualitative property which is consistent to the continuous system.
Keywords: predator prey model, non-standard finite difference scheme, harvesting

Abstrak. Interaksi yang terjadi antara predator dan prey dapat direpresentasikan ke dalam sistem persamaan diferensial non linier yang sulit untuk diselesaikan secara eksak. Pada penelitian ini, model predator-prey yang ditambahkan dengan faktor pemanenan didiskritisasi ke dalam bentuk sistem persamaan beda dengan menggunakan skema beda hingga tak-standar. Hasil analisis menunjukkan bahwa skema yang dikembangkan memiliki sifat kualitatif yang konsisten dengan sistem kontinu.
Kata kunci: model predator-prey, skema beda hingga tak-standar, pemamenan

I. PENDAHULUAN

Populasi dalam suatu ekosistem tidak dapat berdiri sendiri, tetapi saling berinteraksi. Bentuk interaksi yang terjadi di dalam ekosistem antara lain berupa predasi dan persaingan memangsa (*competitors prey*). Predasi merupakan proses pemangsaan terhadap satu spesies, yaitu satu spesies memangsa spesies lain. Dalam predasi, individu yang terlibat mempunyai fungsi sebagai mangsa (*prey*) dan pemangsa (predator). Seiring dengan interaksi tersebut terdapat rangkaian peristiwa memakan dan dimakan yang menjadikan ekosistem tetap seimbang.

Dalam bidang pemodelan matematika, model predator-*prey* masih menjadi hal yang sangat menarik untuk dikaji. Dalam [1], model predator-*prey* yang pertama dicetusakan adalah adalah model Lotka Volterra pada sekitar tahun 1920. Model ini menggambarkan interaksi antara satu spesies *predator* dan satu spesies *prey*. Model ini berbentuk sistem persamaan diferensial non linier sehingga sulit untuk diselesaikan secara eksak. Dalam [2], model predator-prey dimodifikasi dengan menambahkan faktor pemanenan. Sifat-sifat dinamik dari model tersebut dianalisis secara rinci.

Salah satu alternatif lain untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial non linier adalah dengan metode pendekatan numerik. Kelebihan dari metode numerik adalah penyelesaian yang dihasilkan dapat dibuat sedekat mungkin dengan nilai sesungguhnya. Selain itu, tampilan perhitungan juga dapat disimulasikan. Dengan demikian, pada penelitian ini model predator-*prey* akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan skema beda hingga tak-standar. Skema beda hingga tak-standar merupakan metode numerik yang menstransformasikan sistem persamaan diferensial ke dalam bentuk persamaan beda dengan mengaproksimasi turunan pertama dengan generalisasi beda maju dan mendekati suku lainnya dengan pendekatan non-local [3].

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini antara lain menentukan asumsi-asumsi model yang sesuai dan mengidentifikasi variabel-variabel dan parameter yang digunakan dalam model, menurunkan model, menentukan penyelesaian model secara kualitatif dengan metode skema beda hingga tak-standar. Analisis dilakukan untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan.

II. FORMULASI MODEL

Pembuatan model matematika yang bersumber pada kondisi riil diharapkan dapat digunakan untuk memprediksi perilaku model untuk jangka waktu yang lama (*long term behaviour*). Dengan adanya model matematika yang merupakan gambaran fenomena dunia nyata (*real world*), dapat diprediksi perilaku model untuk waktu yang akan datang, apakah unsur-unsur yang terdapat dalam model akan semakin besar dan bertambah tanpa batas, berosilasi (bergerak naik turun) atau mendekati suatu nilai tertentu [4].

Misalkan $N(t)$ menyatakan jumlah *prey* pada saat *t* dan $P(t)$ menyatakan jumlah predator pada saat *t*. Diasumsikan jika tidak ada predator, *prey* tumbuh secara logistik dengan *carrying capacity K*, sehingga model *predator-prey* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - aNP \\ \frac{dy}{dt} &= caNP - dP - mP \end{aligned} \tag{1}$$

dengan *r*, *K*, *a*, *c*, dan *d* konstanta positif. Parameter *r* menyatakan laju pertumbuhan intrinsik prey, *a* menyatakan laju predasi, *c* menyatakan efisiensi predasi yang membagi laju kelahiran predator maksimum per kapita terhadap laju konsumsi maksimum per kapita, *d* menyatakan laju kematian predator, dan *m* menyatakan laju pemanenan [2].

Sistem persamaan (1) memiliki 3 titik kesetimbangan, yaitu TE_1 (0, 0), $TE_2(K,0)$, dan $TE_3\left(\frac{d+m}{ca}, \frac{r}{a}\left(1-\frac{d+m}{Kca}\right)\right)$. Agar komponen pada TE_3 positif, maka haruslah $(d + m) < Kca$.

Untuk selanjutnya, sistem persamaan (1) akan didiskritisasi dengan menggunakan skema beda hingga tak standar dengan pendekatan non lokal seperti dalam [5]. Variabel $t \geq 0$ didiskritisasi pada titik-titik $t_n = nh$ dengan $n = 0,1, 2, ...$ Pada penelitian ini, dipilih $\phi(h) = h$ dengan $h > 0$ menunjukkan ukuran langkah. Akan tetapi, pada bagian Simulasi akan dibandingkan dengan $\phi(h) = \frac{e^{rh}-1}{r}$, sesuai dengan yang dilakukan dalam [6]. Proses diskritisasi model untuk laju populasi *prey* terhadap waktu adalah sebagai berikut.

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{\phi(h)} = rN_n\left(1-\frac{N_{n+1}}{K}\right) - aN_{n+1}P_n$$

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{h} = rN_n\left(1-\frac{N_{n+1}}{K}\right) - aN_{n+1}P_n.$$

Sementara itu, proses diskritisasi model untuk laju populasi predator adalah sebagai berikut

$$\frac{P_{n+1}-P_n}{\phi(h)} = caN_{n+1}P_n - dP_n - mP_{n+1}$$

$$\frac{P_{n+1}-P_n}{h} = caN_{n+1}P_n - dP_n - mP_{n+1}.$$

Dengan demikian, diperoleh bentuk sistem diskrit dari sistem persamaan (1) adalah

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= \frac{(hr+1)N_n}{\left(1+\frac{hr}{K}N_n + haP_n\right)} \\ P_{n+1} &= \frac{(hcaN_{n+1} - dh + 1)P_n}{(1+mh)}. \end{aligned} \tag{2}$$

III. ANALISIS TITIK KESETIMBANGAN

Untuk menguji kestabilan ketiga titik kesetimbangan, definisikan fungsi berikut

$$f_1(N,P) = \frac{(hr+1)N}{\left(1+\frac{hr}{K}N + haP\right)} \tag{3a}$$

$$f_2(N,P) = \frac{(hcaN - dh + 1)P}{(1+mh)}. \tag{3b}$$

Matriks Jacobi dari sistem (2) yang dilinierisasi di sekitar titik kesetimbangan (N^*, P^*) adalah sebagai berikut

$$J_{(N^*,P^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(N^*,P^*)}{\partial N} & \frac{\partial f_1(N^*,P^*)}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2(N^*,P^*)}{\partial N} & \frac{\partial f_2(N^*,P^*)}{\partial P} \end{pmatrix} \tag{4}$$

dengan

$$\frac{\partial f_1(N^*,P^*)}{\partial N} = \frac{(hr+1)(1+haP^*)}{\left(1+\frac{hr}{K}N^* + haP^*\right)^2}$$

$$\frac{\partial f_1(N^*,P^*)}{\partial P} = \frac{-(hr+1)haN^*}{\left(1+\frac{hr}{K}N^* + haP^*\right)^2}$$

$$\frac{\partial f_2(N^*,P^*)}{\partial N} = \frac{hcaP^*}{(1+mh)}$$

$$\frac{\partial f_2(N^*,P^*)}{\partial P}=\frac{hcaN^*-dh+1}{(1+mh)}.$$

Titik kesetimbangan (N^*, P^*) akan stabil jika semua nilai eigen (λ_i, i =1, 2) matriks Jacobi pada persamaan (4) memenuhi $|\lambda_i|<1$.

Matriks Jacobi (4) untuk $TE_1(0, 0)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$J_{TE_1}=\begin{pmatrix} hr+1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-dh+1}{1+mh}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi (5) adalah $\lambda_1=hr+1$ dan $\lambda_2=\dfrac{1-dh}{1+mh}$. Karena $\lambda_1>1$, maka TE_1 tidak stabil.

Selanjutnya, matriks Jacobi (4) untuk $TE_2(K, 0)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$J_{TE_2}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+hr} & \dfrac{-haK}{1+hr} \\ 0 & \dfrac{hcaK-dh+1}{1+mh}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi (6) adalah $\lambda_1=\dfrac{1}{hr+1}$ dan $\lambda_2=\dfrac{hcaK-dh+1}{1+mh}$. Karena (1 + *hr*) >1 maka $0<\lambda_1<1$. Dengan demikian, TE2 akan stabil jika memenuhi kedua syarat berikut:

(i) $h(caK-d)>-2+hr$
(ii) $caK-d<r$.

Sementara itu, untuk TE_3, matriks Jacobi dapat ditulis sebagai berikut

$$J_{TE_3}=\begin{pmatrix} \dfrac{1+hr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{1+hr} & \dfrac{h(d+m)}{1+hr} \\ \dfrac{hcr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{1+mh} & \dfrac{1+dm}{1+mh}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi (7) adalah

$$\lambda^2-\left(\frac{1+dm}{1+mh}+\frac{1+hr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{1+hr}\right)\lambda+\left(\frac{1+dm}{1+mh}\right)\left(\frac{1+hr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{1+hr}\right)$$
$$-\frac{h^2cr(d+m)\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{(1+hr)(1+mh)}=0. \tag{8}$$

Dari persamaan karakteristik (8), misalkan,

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 1 (Jun 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

$$A=\left(\frac{1+dm}{1+mh}+\frac{1+hr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{1+hr}\right) \tag{9}$$

$$B=\frac{(1+dm)\left(1+hr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)\right)-h^2cr(d+m)\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)}{(1+hr)(1+mh)}. \tag{10}$$

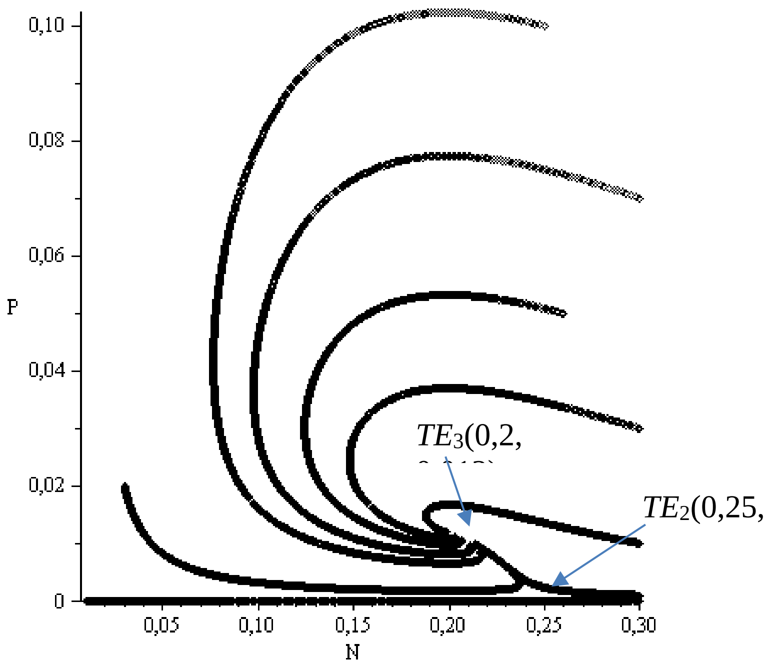
Untuk menentukan nilai eigen dari persamaan (8), dapat digunakan Lemma berikut [7, 8].

Lemma 1. *Akar-akar persamaan kuadrat* $\lambda^2-A\lambda+B=0$ *memenuhi* $|\lambda_i|<1, i=1,2$ *jika dan hanya jika syarat-syarat berikut terpenuhi*

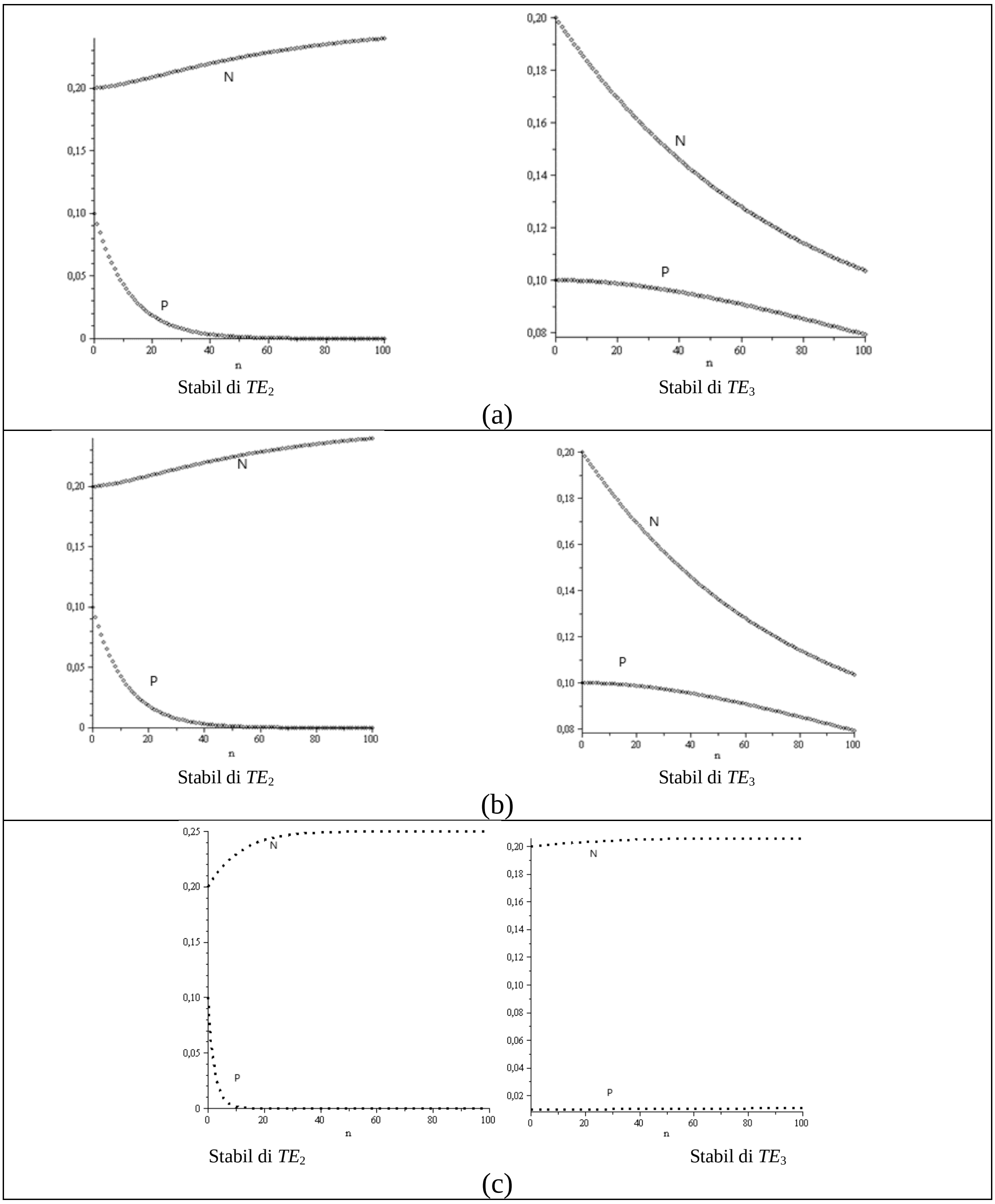
(i) $1 + A + B > 0$
(ii) $1 – A + B > 0$
(iii) $B < 1$

Dari syarat kepositifan titik kesetimbangan TE_3, $(d + m) < caK$, sehingga nilai $A > 0$. Sementara itu, TE_3 akan stabil jika memenuhi ketiga syarat pada Lemma 1 yaitu: (a)
$0<(1+dm)\left(1+hr\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)\right)-h^2cr(d+m)\left(1-\dfrac{d+m}{caK}\right)<(1+hr)(1+mh)$

(b) $m+h(d+m)\left(\dfrac{1}{caK}+(d+m)\right)>hm+(d+m)\left(hc+\dfrac{dm}{caK}\right)$.



Gambar 1. Penyelesaian (N_n, P_n) untuk berbagai nilai awal



Gambar 2. Perbandingan simulasi (a) skema beda hingga tak-standar dengan $\phi(h) = h,$ (b) skema beda hingga tak-standar dengan $\phi(h) = \dfrac{e^{rh} - 1}{r}$, dan (c) metode Runge-kutta orde 4

IV. SIMULASI

Simulasi dilakukan untuk melihat kekonvergenan sistem pada berbagai nilai awal. Pada simulasi ini, diambil nilai-nilai parameter r = 0,03, a = 0,5, c = 0,4, d = 0,01, m = 0,03, h = 0,2, K = 0,25. Dengan nilai-nilai parameter tersebut, untuk $P_0 \neq 0$, penyelesaian konvergen ke TE_3. Sementara itu, untuk $P_0 = 0$, penyelesaian konvergen ke TE_2.

Selanjutnya, simulasi dilakukan untuk melihat perbandingan skema beda hingga tak standar dengan metode Runge-kutta orde 4. Pada bagian ini, ukuran langkah ditentukan h = 0,2. Hasil simulasi ditunjukkan pada Gambar 2. Pada Gambar 2, terlihat untuk skema beda hingga tak-standar baik dengan $\phi(h) = h,$ maupun dengan $\phi(h) = \dfrac{e^{rh} - 1}{r}$ tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan. Lain halnya dengan metode Runge Kutta orde 4, terlihat untuk iterasi n yang lebih kecil, grafik lebih cepat menuju TE_2 (0,25, 0) dan TE_3 (0,2, 0,012).

V. KESIMPULAN

Skema beda hingga tak standar memberikan alternatif solusi untuk sistem persamaan diferensial non linier. Sistem tersebut didiskritisasi menjadi sebuah sistem persamaan beda. Model predator-prey dengan pemanenan yang telah dibentuk menjadi sistem persamaan beda dengan menggunakan skema beda hingga tak-standar memberikan perilaku dinamik yang konsisten dengan sistem kontinunya. Pemilihan fungsi $\phi(h) = h$ dan $\phi(h) = \dfrac{e^{rh} - 1}{r}$ tidak memberikan perbedaan yang signifikan terhadap perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Jika dibandingkan dengan metode Runge-kutta, metode Runge-kutta orde 4 membutuhkan jumlah iterasi yang lebih sedikit agar sistem konvergen. Akan tetapi, untuk tingkat keakuratan tentu saja harus dibuktikan dengan membandingkan kedua metode terhadap data di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Edwards, C. H. dan Penney, D. E. 2000 : *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems Fourth Edition*. Prentice-Hall. New Jersey.
[2] Li, B., Liu, S., Cui, J., dan Li, J. 2016. A Simple Predator-Prey Population Model with Rich Dynamics. *Applied Sciences*. 6(115). 150 – 168.
[3] Suryanto, A. 2012. *Skema Beda Hingga Tak-Standar untuk Model Epidemi dengan Laju Penularan Tersaturasi yang Dimodifikasi*, Konferensi Nasional Matematika XVI, Jatinangor.
[4] Allen, L.J.S. 2006. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson Education. United States.
[5] Mickens, R. E. 2000. *Application of Nonstandard Finite Difference Schemes*, World Scientific. Publishing Co Pte. Ltd.
[6] Mickens, R.E. 2007. Calculation of Denominator Functions for Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations Satisfying a Positivity Condition. Numer. *Methods Partial Differential Equations*. 23(3).672 – 691.
[7] Brauer, F. And Castillo-Chavez, C. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer. New York.
[8] Elaydi, S. 2005. An Introduction to Difference Equations. 3rd ed. Springer. New York.