JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 2 (Nov 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

FUNGSI TERDEKATI DAN SIFAT-SIFATNYA

Abdul Aziz[1], Susilo Hariyanto[2], Y.D Sumanto[3], Solikhin[4]

[1,2,3,4]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl.Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang, Indonesia 50275
Email: [1]abdulaziz01@yahoo.com

Abstract. In this paper, we have defined an approachable function using a simple function on a compact sets. Furthermore the simple properties of the function was examined and it was obtained that measurable function, continuous function, and bounded function are approachable function along the function space is a linier space.
Keywords: Simple function, Measurable function, Tag partition

Abstrak. Pada artikel ini, didefinisikan fungsi terdekati menggunakan suatu fungsi sederhana pada himpunan kompak. Selanjutnya dikaji sifat – sifat sederhana dari fungsi tersebut dan diperoleh bahwa fungsi terukur, fungsi kontinu, dan fungsi terbatas semuanya merupakan fungsi terdekati serta ruang fungsi tersebut merupakan ruang linier.
Kata kunci: Fungsi sederhana, fungsi terukur, partisi tanda

I. PENDAHULUAN

Himpunan tak terhingga lebih sulit ditangani dari pada himpunan terhingga. Namun ada himpunan tak terhingga yang mempunyai sifat seperti himpunan terhingga, yaitu himpunan kompak. Himpunan kompak mempunyai peranan penting dalam domain suatu fungsi. Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan kompak jika himpunan A tertutup dan terbatas [1]. Selanjutnya himpunan kompak juga digeneralisasi dalam ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [2]. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak, δ adalah fungsi positif pada S, P_δ adalah $\left\{(I_k, t_k)\right\}_{k=1}^{n}$ yang memenuhi $t_k \in S$, dan $\{I_k\}$ adalah himpunan sel – sel yang tidak saling tumpang tindih dan $t_k \in I_k \subseteq N\left(t_k, \delta\left(t_k\right)\right)$ dengan k = 1, 2, 3, …, n. P_δ disebut partisi bertanda δ – fine terkait pada S [2] jika $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Volume dari $I = \left[a_1, b_1\right] \times \ldots \times \left[a_n, b_n\right]$ adalah $\mu\left(I\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(b_i - a_1\right)$ [3]. Dengan menggunakan volume tersebut, himpunan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ dikatakan terukur – δ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ sehingga jika $P_\delta = \left\{(I_k, t_k)\right\}_{k=1}^{n}$ dan $Q_\delta = \left\{(J_i, r_i)\right\}_{k=1}^{v}$ berturut – turut merupakan partisi bertanda δ – fine terkait pada S dan partisi bertanda δ – fine terkait pada $R^m - S$ maka $\sum_k \sum_j \mu\left(I_k \cap J_k\right) < \varepsilon$ [4]. Selanjutnya, ukuran luar S diberikan dengan $\mu\left(S\right) = \inf_{\delta} \sup_{P_\delta} \sum_{k=1}^{n} \mu\left(I_k\right)$.

Pada artikel ini, penulis menggunakan fungsi sederhana - P_δ untuk mendefinisikan fungsi terdekati (*approachable function*) pada himpunan kompak dan mengkaji sifat – sifatnya.

II. FUNGSI TERDEKATI DAN SIFAT – SIFATNYA

Sebelum membahas fungsi terdekati pada himpunan kompak, terlebih dahulu didefinisikan fungsi sederhana – P_δ dan fungsi terukur – δ.

Definisi 2.1. [3] Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak, δ adalah fungsi positif pada S, dan $P_\delta = \left\{\left(I_k, t_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$ adalah partisi δ – fine terkait S. Fungsi $\varphi : S \to \mathbb{R}$ disebut fungsi sederhana – P_δ pada S jika terdapat $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{I_k \cap S}$.

Definisi 2.2. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan terukur - δ. Fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ disebut fungsi terukur – δ jika untuk setiap $I \subseteq \mathbb{R}$ berlaku $f^{-1}\left(I\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in I\right\}$ adalah himpunan terukur - δ.

Selanjutnya dibahas fungsi baru yang dinamakan fungsi terdekati pada himpunan kompak beserta sifat – sifatnya.

Definisi 2.3. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah himpunan kompak. Fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ disebut fungsi terdekati (*approachable function*) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ pada S sedemikian sehingga jika $P_\delta = \left\{\left(I_k, t_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$ adalah partisi bertanda δ – fine terkait S maka terdapat fungsi sederhana – P_δ φ pada S sedemikian sehingga $\left|\varphi(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

Dari definisi di atas, dapat diperoleh beberapa sifat sebagai berikut.

Teorema 2.4. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak. Jika fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ terukur – δ maka f adalah fungsi terdekati.

Bukti:

Pertama – tama ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Selanjutnya dengan mengambil sebarang $y \in \mathbb{R}$, terdapat $A_y \subseteq \left(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Karena f terukur – δ maka $f^{-1}\left(A_y\right)$ adalah himpunan terukur – δ. Selanjutnya jelas $S \subseteq \bigcup_{y \in f(S)} f^{-1}\left(A_y\right)$. Karena S kompak maka terdapat $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$ sehingga $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}\left(A_{y_k}\right)$. Selanjutnya untuk setiap $f^{-1}\left(A_{y_k}\right)$, terdapat partisi bertanda δ – fine terkait $f^{-1}\left(A_{y_k}\right)$ $P_{\delta_k} = \left\{\left(I_{k_i}, t_{k_i}\right)\right\}_{i=1}^{m_k}$ dengan k = 1, 2, 3, …, r. Dengan memilih $c_i = f\left(t_{k_i}\right)$ dengan $t_{k_i} \in I_{k_i}$ maka untuk setiap $x \in S$, terdapat $I_{k_i} \subseteq f^{-1}\left(A_{y_k}\right)$ sehingga $x \in I_{k_i} \subseteq f^{-1}\left(A_{y_k}\right)$. Dari sini berakibat

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 2 (Nov 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

$f(x) \in A_{y_k} \subseteq \left(y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$. Oleh karena $x, t_{k_i} \in I_{k_i}$ maka $\left| f(x) - c_i \right| = \left| f(x) - f(t_{k_i}) \right| < \varepsilon$.

Selanjutnya dengan memilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_r\}$ maka untuk $P_\delta = \left\{ \left(I_j, t_j \right) \right\}_{j=1}^{u}$ adalah partisi bertanda δ – fine terkait *S*. Dari sini berakibat untuk setiap t_j , terdapat A_k sehingga $t_j \in A_k$. Misalkan $\varphi = \sum_{j=1}^{u} c_j \chi_{I_j \cap S}$ dengan $c_j = f\left(t_j\right)$. Selanjutnya untuk setiap $x \in S$, $x \in f^{-1}\left(A_k\right)$, sehingga $f\left(x\right) \in A_k \subseteq \left(y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$. Di sisi lain, untuk setiap $x \in S$, terdapat *j* sehingga $x, t_j \in I_j$. Padahal untuk setiap I_j , terdapat *k* sehingga $I_j \subseteq f^{-1}\left(A_k\right)$. Selanjutnya oleh karena $x, t_j \in I_j$ maka $f\left(x\right), f\left(t_j\right) \in A_k \subseteq \left(y_k - \frac{\varepsilon}{2}, y_k + \frac{\varepsilon}{2} \right)$. Sehingga $\left| f(x) - c_j \right| = \left| f\left(x\right) - f\left(t_j\right) \right| < \varepsilon$.

Teorema 2.5. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak. Jika fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ dan fungsi $g : S \to \mathbb{R}$ masing – masing adalah fungsi terdekati maka $f + g$ adalah fungsi terdekati.

Bukti:

Karena $f : S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terdekati maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ_1 pada *S* sehingga jika $P_{\delta_1} = \left\{ \left(I_k, t_k \right) \right\}_{k=1}^{n}$ adalah partisi bertanda δ_1 – fine terkait *S*, terdapat fungsi sederhana $-P_{\delta_1}$ φ pada *S* sehingga $\left| \varphi(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk semua $x \in S$.

Karena $g : S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terdekati maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ_2 pada *S* sehingga jika $P_{\delta_2} = \left\{ \left(I_k, t_k \right) \right\}_{k=1}^{n}$ adalah partisi bertanda δ_2 – fine terkait *S*, terdapat fungsi sederhana – P_{δ_2} ϕ pada *S* sehingga $\left| \phi(x) - g(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk semua $x \in S$.

Selanjutnya dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2\right\}$ sehingga untuk $P = \left\{ \left(I_k, t_k \right) \right\}_{k=1}^{n}$ adalah partisi bertanda δ – fine terkait *S* maka terdapat fungsi sederhana – P $\varphi + \phi$ pada S sehingga untuk semua $x \in S$, berlaku $\left| \left(\varphi(x) + \phi(x) \right) - \left(f(x) + g(x) \right) \right| \le \left| \varphi(x) - f(x) \right| + \left| \phi(x) - g(x) \right| < \varepsilon$.

Teorema 2.6. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak. Jika fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terdekati dan *k* adalah bilangan real maka kf adalah fungsi terdekati.

Bukti:

Karena $f : S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terdekati maka untuk setiap $\dfrac{\varepsilon}{|k|+1} > 0$ dengan *k* adalah bilangan real, terdapat fungsi positif δ pada *S* sehingga jika $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$ adalah partisi bertanda δ – fine terkait *S*, terdapat fungsi sederhana $-P_{\delta_1}$ φ pada *S* sedemikian sehingga $|\varphi(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{|k|+1}$, untuk semua $x \in S$. Selanjutnya ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dengan mengambil δ yang sama dengan δ di atas maka untuk $P_\delta = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$ adalah partisi bertanda δ – fine terkait *S,* terdapat fungsi sederhana - P_δ $k\,\varphi$ pada *S* sedemikian sehingga untuk semua $x \in S$ berlaku

$$\begin{aligned} |k\,\varphi(x) - k\,f(x)| &= |k|\,|\varphi(x) - f(x)| \\ &< |k|\left(\frac{\varepsilon}{|k|+1}\right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Teorema 2.7. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak. Jika fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ kontinu pada himpunan kompak S maka f adalah fungsi terdekati.

Bukti:

Karena fungsi f kontinu pada himpunan kompak S maka f kontinu seragam pada *S*. Dengan kata lain, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $x, y \in S$ dengan $\|x - y\| < \dfrac{\delta}{2}$ maka $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\dfrac{\delta}{2}$ dengan δ sama dengan δ di atas, maka terdapat partisi δ bertanda δ – fine terkait *S* yaitu $P_{\frac{\delta}{2}} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$. Selanjutnya misalkan $\varphi = \sum c_i\, \chi_{I_k \cap S}$ dengan $c_i = f(t_i)$. Dengan mengambil sebarang $x \in S$, terdapat I_k sehingga $x \in I_k \cap S \subseteq \left(t_k - \dfrac{\delta}{2}, t_k + \dfrac{\delta}{2}\right)$. Dari sini diperoleh $\varphi(x) = c_k = f(t_k)$.

Oleh karena $t_k, x \in I_k \cap S$ maka $\|x - t_k\| < \delta$. Sehingga $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(t_k)| < \varepsilon$.

Teorema 2.8. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^m$ adalah himpunan kompak. Jika fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ terbatas maka f adalah fungsi terdekati.

Bukti:

Karena f terbatas maka terdapat bilangan real positif M sehingga $-M \le f \le M$. Dengan mengambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat Archimides terdapat bilangan asli n sehingga $n > \frac{2M}{\varepsilon}$. Selanjutnya bagi interval $[-M, M]$ menjadi sebanyak n sub interval yaitu $I_1, I_2, \ldots, I_n$ yang panjangnya masing – masing adalah $\frac{2M}{n}$. Oleh karena $-M \le f \le M$ maka $S \subseteq f^{-1}(-M, M) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(I_k)$ dengan k = 1, 2, 3, …, n. Selanjutnya karena S kompak maka $\overline{f^{-1}(I_k)}$ juga kompak untuk semua k. Dari sini berakibat untuk setiap k, terdapat $\delta_k > 0$ sehingga $f^{-1}(I_k) \subseteq N(t_k, \delta_k)$. Selanjutnya pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n\}$. Oleh karena $\overline{f^{-1}(I_k)}$ kompak maka terdapat partisi bertanda δ – fine terkait $f^{-1}(I_k)$ yaitu $P_{jk} = \left\{\left(j_{k_i}, t_{k_i}\right)\right\}_{i=1}^{m_k}$. Misalkan $\varphi = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_k} c_{k_i}\chi_{j_{k_i} \cap S}$, dengan $c_{k_i} = f\left(t_{k_i}\right)$. Dengan mengambil sebarang $x \in S$, terdapat J_{k_i} sehingga $x, t_{k_i} \in J_{k_i} \subseteq \overline{f^{-1}(I_k)}$. Dari sini berakibat $f(x), f(t_{k_i}) \in I_k$, sehingga $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(t_{k_i})| < |I_k| = \frac{2M}{n} < \varepsilon$.

III. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa fungsi terdekati pada himpunan kompak dapat didefinsikan menggunakan fungsi sederhana - P_δ. Selanjutnya, dari definisi di atas diperoleh beberapa sifat diantaranya fungsi terukur, fungsi kontinu, dan fungsi terbatas semuanya merupakan fungsi terdekati dan ruang fungsi tersebut merupakan ruang linier.

REFERENSI

[1] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., (1992). Introduction to Real Analysis second edition. John Wiley & Sons (SEA), Singapore.
[2] Bartle, R. G. (1976). The Elements of Real Analysis second edition. John Wiley & Sons (SEA), Canada.

[3] Fremlin, D.H. (2000). Measure Theory (Volume 1). Torres Fremlin, England.
[4] Pfeffer, W.F., (1993). The Riemann Approach to Integration. Cambridge University Press, New York.
[5] Kopp, E. & Capinski, M. (2004). Measure, Integral and Probability second edition. Springer-Verlag, London.