JFMA

OPERATOR ACCRETIVE KUAT PADA RUANG HILBERT

Razis Aji Saputro[1], Susilo Hariyanto[2], Y.D Sumanto[3]

[1,2,3]*Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Jalan Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang*
Email : [1]razisaji25@gmail.com, [2]sus2_hariyanto@yahoo.co.id, [3]ydsumanto@gmail.com

Abstract. Pre-Hilbert space is a vector space equipped with an inner-product. Furthermore, if each Cauchy sequence in a pre-Hilbert space is convergent then it can be said complete and it called as Hilbert space. The accretive operator is a linear operator in a Hilbert space. Accretive operator is occurred if the real part of the corresponding inner product will be equal to zero or positive. Accretive operators are also associated with non-negative self-adjoint operators. Thus, an accretive operator is said to be strict if there is a positive number such that the real part of the inner product will be greater than or equal to that number times to the squared norm value of any vector in the corresponding Hilbert Space. In this paper, we prove that a strict accretive operator is an accretive operator.
Keywords: Hilbert Space, Accretive operator, Self-adjoint operator, Strict accretive operator.

Abstrak. Ruang Pre-Hilbert merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan perkalian dalam. Lebih lanjut, apabila setiap barisan Cauchy dalam suatu ruang Pre-Hilbert bersifat konvergen maka ia dapat disebut komplit dan ia disebut ruang Hilbert. Operator accretive merupakan operator linier dalam suatu ruang Hilbert. Operator accretive muncul jika bagian real dari perkalian dalam bernilai nol atau positif. Operator Accretive juga berasosiasi dengan operator *non-negative self-adjoint*. Kemudian, suatu operator accretive dikatakan kuat jika terdapat bilangan positif sedemikian sehingga bagian real dari perkalian dalam bernilai lebih besar atau sama dengan bilangan tersebut dikalikan nilai norma dikuadratkan dari sebarang vektor dalam ruang Hilbert yang bersangkutan. Dalam artikel ini, dibuktikan bahwa suatu operator accretive kuat juga merupakan operator accretive.
Kata kunci: Ruang Hilbert, Operator accretive, Operator *self-adjoint*, Operator accretive kuat.

I. PENDAHULUAN

Analisa fungsional adalah cabang dari ilmu matematika yang membahas berbagai macam teori dasar matematika. Salah satu tinjauan pokok dari analisa fungsional yaitu mengenai operator. Operator membahas tentang pemetaan yang mengawankan ruang vektor ke ruang vektor. Ruang vektor adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi penjumlahan dan perkalian pada skalar pada suatu lapangan. Pada pembahasan ruang vektor yang berhubungan dengan ruang metrik dalam analisa fungsional akan lebih sering dibahas mengenai konsep kekontinuan dan kekonvergenan pada barisan dalam ruang vektor sehingga terdapat suatu topologi atau sifat-sifat yang mempengaruhi.

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 1 (June 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

Didalam Analisa fungsional terdapat beberapa kajian tentang berbagai operator. Beberapa kajian tersebut mengenai operator *adjoint*, operator *self-adjoint*, operator *simetrik*, operator *uniter*, dan lain lain. Pada pembahasan ini dibahas mengenai salah satu operator yaitu tentang operator *accretive* pada ruang Hilbert. Selanjutnya operator *accretive* merupakan suatu operator linier yang secara khusus merupakan operator *self-adjoint* non-negatif. Sebagai pemahaman awal terdapat beberapa konsep dasar yang perlu diketahui terlebih dahulu untuk mengkaji operator *acretive* yaitu mengenai ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, operator linier pada ruang Hilbert. Kemudian pada artikel ini akan dibahas mengenai ruang Hilbert, operator-operator pada ruang Hilbert, dan operator *accretive*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan akan dikaji mengenai operator *accretive* pada ruang Hilbert. Sebagai bahan telaah, pertama, dijelaskan terlebih dahulu mengenai ruang Hilbert yang merupakan ruang inner-produk lengkap. Kedua, dijelaskan tentang operator *self-adjoint* untuk mengkaji hubungan dengan operator *accretive*. Ketiga dijelaskan tentang definisi operator *accretive* dan teorema penunjangnya serta hasil utama dari kajian ini.

***Definisi* 1 [4]** *Diberikan $\mathcal{H}$ ruang vektor, F lapangan atas bilangan komplek dengan skalar α anggota dari lapangan komplek. Suatu operator $\mathcal{H}\, x\, \mathcal{H} \rightarrow F$ dengan rumus $(x,y) \in \mathcal{H}x\mathcal{H} \rightarrow \langle x,y\rangle \in F$ yang memenuhi sifat-sifat:*
1. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,
2. $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$,
3. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$, *untuk setiap $x,y,z \in \mathcal{H}$ dan skalar α, dan*
4. $\langle x,x\rangle > 0$ *jika dan hanya jika $x \neq \theta$,*

disebut dengan ruang pre-Hilbert atau ruang inner-produk.

Contoh 1 Ruang vektor $\ell^2 = \{x : x = \{x_k\} \in S$ (S adalah koleksi semua barisan bilangan) dan $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 < \infty\}$, dengan didefinisikan ruang inner produk $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ untuk setiap $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\} \in \ell^2$, sehingga merupakan ℓ^2 ruang pre-Hilbert dengan memenuhi sifat-sifatnya.

Definisi-definisi berikut dituliskan untuk membangun pemahaman sebelum membahas operator accretive.

Definisi 2 [4] *Ruang Hilbert adalah ruang pre-Hilbert yang lengkap.*

Definisi 3 [4] Operator T dikatakan *Self-adjoint* atau *Hermitian* jika $T^* = T$.

Contoh 2 Diberikan operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$ dengan $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ dan $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ sedemikian sehingga $T^* = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}$ adalah operator *adjoint*. Kemudian jika $b = c$ maka $T = T^*$ sehingga T operator *self-adjoint.*

Teorema 4 [4] *Kondisi berikut dalam operator T adalah ekuivalen:*
1. *T adalah Self-adjoint*
2. $\langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle$ *untuk setiap $x,y \in \mathcal{H}$*

3. $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ *untuk setiap* $x \in \mathcal{H}$
4. $\langle Tx, x\rangle$ *riil, untuk setiap* $x \in \mathcal{H}$

Bukti teorema tersebut dapat dilihat di referensi [4].

Teorema 5 [2] *Pernyataan-pernyataan berikut berlaku:*
1. *Jika S dan T adalah operator self-adjoint, maka $S + T$ operator self-adjoint*
2. *Jika T adalah operator self-adjoint, dan skalar α riil, αT adalah operator self-adjoint.*
3. *T^*T dan $T + T^*$ adalah operator self-adjoint*
4. *Jika S dan T adalah operator self-adjoint, maka ST operator self-adjoint jika dan hanya jika $ST = TS$*

Bukti teorema tersebut dapat dilihat di referensi [2].

Definisi 6 [1] *Diberikan operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dengan $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ adalah koleksi operator linier di ruang Hilbert. Operator T disebut accretive, jika bagian riil dari $\langle Tu, u\rangle$ yang dinotasikan $Re\langle Tu, u\rangle \geq 0$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.*

Contoh 3 Diberikan operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. didefinisikan inner produk $\langle u, v\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}$ untuk setiap $u = (z_1, z_2), v = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ dan $z = a + bi$. bahwa operator T tersebut *accretive*.

Definisi 7 [1] Diberikan operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dengan $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ adalah koleksi operator linier di ruang Hilbert. Operator T disebut non negatif, jika $\langle Tu, u\rangle \geq 0$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.

Contoh 4 Operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Akibat 8 [1] Diberikan operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ adalah operator *accretive* jika dan hanya jika $T + T^*$ adalah operator *self-adjoint* non negatif.

Bukti: Diketahui bahwa operator *self-adjoint* T dikatakan *self-adjoint* jika $T = T^*$ dan dan operator non-negatif T dikatakan non-negatif jika $T \geq 0$. Sehingga dapat dibuktikan:
($\Longrightarrow$) Diberikan $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operator *accretive* ditunjukkan $T + T^*$ adalah operator *self-adjoint* non-negatif. Diambil sebarang $u \in \mathcal{H}$ maka

$$\begin{aligned}\langle (T+T^*)^*u, u\rangle &= \langle u, (T+T^*)^{**}u\rangle = \langle u, (T+T^*)\,u\rangle = \langle u, Tu + T^*u\rangle \\ &= \langle u, Tu\rangle + \langle u, T^*u\rangle = \langle T^*u, u\rangle + \langle Tu, u\rangle = \langle T^*u + Tu, u\rangle = \langle (T^* + T)u, u\rangle \\ &= \langle (T+T^*)u, u\rangle\end{aligned}$$

Maka $(T + T^*)^* = (T + T^*)$. Terbukti bahwa $T + T^*$ operator *self-adjoint*. Kemudian setelah dibuktikan bahwa $T + T^*$ *self-adjoint* selanjutnya ditunjukkan $T + T^*$ operator non-negatif. Diambil sebarang $u \in \mathcal{H}$, maka

$$\begin{aligned}\langle (T+T^*)u, u\rangle &= \langle Tu + T^*u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle + \langle T^*u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle + \langle u, Tu\rangle \\ &= \langle Tu, u\rangle + \overline{\langle Tu, u\rangle} = 2Re\langle Tu, u\rangle \geq 0 \text{ (karena } T \text{ operator } \textit{accretive}\text{)}\end{aligned}$$

Maka terbukti $T + T^*$ operator non-negatif. Sehingga $T + T^*$ operator *self-adjoint* non-negatif.
($\Longleftarrow$) Diketahui $T + T^*$ merupakan operator *self-adjoint* non-negatif ditunjukkan operator T adalah *accretive*. Untuk setiap $u \in \mathcal{H}$ maka

$$0 \leq \langle (T+T^*)u, u\rangle = \langle Tu + T^*u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle + \langle T^*u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle + \langle u, Tu\rangle$$

$= \langle Tu, u\rangle + \overline{\langle Tu, u\rangle} = 2Re\langle Tu, u\rangle$

karena $T + T^*$ non-negatif maka diperoleh $Re\langle Tu, u\rangle = \frac{1}{2}\langle (T + T^*)u, u\rangle \geq 0$ sehingga terbukti T *accretive*. ■

Definisi 9 [1] Sebuah operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dikatakan *accretive* kuat jika terdapat K positif sehingga memenuhi $Re\langle Tu, u\rangle \geq K\|u\|^2$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.

Contoh 5 Diberikan operator identitas $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kemudian didefinisikan dengan $Ix = x$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$. Ditunjukkan bahwa operator I tersebut accretive kuat dengan memenuhi $Re\langle \mathrm{I}x, x\rangle \geq K\|x\|^2$

Kemudian dengan beberapa pembahasan sebelumnya diperoleh suatu teorema hubungan antara operator *accretive* dan operator *accretive* kuat.

Teorema 10 *Jika operator T adalah accretive kuat maka operator T juga merupakan operator accretive.*

Bukti: Diketahui bahwa operator T adalah operator *accretive* kuat. Dengan definisi operator *accretive* kuat maka terdapat suatu K positif sedemikian hingga berlaku $Re\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq K\|x\|^2$ untuk $x \in \mathcal{H}$. Dibuktikan bahwa operator *accretive* kuat merupakan operator *accretive*. Diambil sembarang $x \in \mathcal{H}$ terdapat $K > 0$, $\|x\|^2 \geq 0$ sedemikian hingga memenuhi $Re\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq K\|x\|^2 \geq 0$ karena K positif dan $\|x\|^2$ dengan $x \geq 0$ selalu bernilai positif maka terbukti bahwa operator *accretive* kuat merupakan operator *accretive*. ■

Pernyataan pada Teorema 3.10 tidak berlaku sebaliknya, namun jika terdapat syarat bahwa $\|x\| = 0$ maka hal itu akan terjadi jika operator *accretive* merupakan operator *accretive* kuat.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diberikan, maka dapat diperoleh beberapa kesimpulan. Pertama, operator *accretive* merupakan operator yang nilai riil dari suatu $\langle Tx, x\rangle$ adalah nol atau positif. Operator *accretive* memiliki hubungan dengan operator *self-adjoint non-negatif*. Jika T adalah *accretive* maka T adalah *self-adjoint non-negatif*, berlaku juga sebaliknya. Kedua, operator *accretive* kuat merupakan operator *accretive* yang terdapat suatu K positif sedemikian hingga $Re\langle Tx, x\rangle \geq K\|x\|^2$ untuk $x \in \mathcal{H}$. Sehingga kemudian didapatkan suatu teorema, jika operator T adalah *accretive* maka operator T juga *accretive* kuat, tidak berlaku sebaliknya.

REFERENSI

[1] M[C]Intosh, Alan, *Functional Calculi*. Lashi Bandara, 2010.
[2] Darmawijaya, Soeparna, *Pengantar Analisis Abstrak*, UGM, Yogyakarta, 2007.
[3] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Application*, Wiley Classics Library, 1978.
[4] Berberian, Sterling. K, *Introduction to Hilbert Space*, New York: Oxford university Press, 1961.