

PELABELAN TOTAL SUPER TRIMAGIC SISI PADA BEBERAPA GRAF

Robertus Heri SU¹, Heru Tjahjana², Bambang Irawanto³, Lucia Ratnasari⁴

^{1,2,3,4}Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jalan Prof. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Email : ¹soelistyoutomo@gmail.com, ²heru_tjahjana@undip.ac.id, ³b_irawanto@yahoo.co.id,
⁴ratnasari.lucia@yahoo.com

Abstract. This paper is addressed to discuss the edge super trimagic total labeling on some graphs which are corona, double ladder, quadrilateral snake and alternate triangular snake. The main results are the edge super trimagic total label for these graphs. Furthermore, it was prove that corona is a graph with edge super trimagic total labeling, a double ladder with odd ladder is graph with edge super trimagic total labeling, quadrilateral snake is a graph with edge super trimagic total labeling and finally an alternate triangular snake with odd ladder is graph with edge super trimagic total labeling.
Keywords: Corona graph, Double ladder, Quadrilateral snake, Alternate triangular snake, Edge super trimagic total labeling.

Abstrak. Dalam artikel ini, dibahas pelabelan total *trimagic* sisi untuk beberapa graf yaitu graf korona, graf *double ladder*, graf *quadrilateral snake* dan graf *alternate triangular snake*. Hasil utama dalam artikel ini adalah hasil-hasil pelabelan total *trimagic* sisi untuk graf-graf tersebut. Lebih lanjut, telah dibuktikan bahwa graf korona merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi, graf *double ladder* dengan banyak *ladder* genap merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi, graf *quadrilateral snake* merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi, dan terakhir, graf *alternate triangular snake* merupakan graf pelabelan total *trimagic* sisi untuk banyak *triangular* genap.

Kata kunci: Graf Korona, Graf *double ladder*, Graf *quadrilateral snake*, Graf *alternate triangular snake*, Pelabelan Total *Trimagic* Sisi.

I. PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang mempelajari tentang diagram yang berisi titik-titik dan sisi-sisi, dimana setiap sisi menghubungkan tepat dua titik. Graf merupakan pasangan himpunan tak kosong V yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan himpunan E yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*). Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf. Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan unsur-unsur dari elemen graf (titik atau sisi atau keduanya) ke himpunan bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau non negatif) yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlăck, kemudian Stewart, selanjutnya Kotzig dan Rosa. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan antara himpunan titik dan himpunan sisi. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan diantaranya adalah pelabelan ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total *magic* sisi.

Dalam pelabelan total *magic* sisi terdapat pula pelabelan total *bimagic* sisi dan pelabelan total *trimagicsisi*.

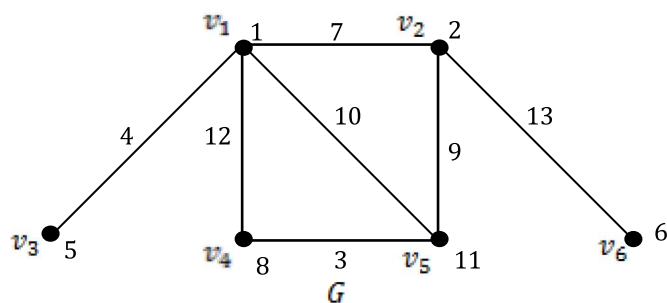
Kotzig and Rosa telah mendefinisikan pelabelan total *magic* sisi dari suatu graf $G(V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ adalah suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(G)$, berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j)$ adalah konstan [1]. J. Baskar Babuje telah memperkenalkan pelabelan total *bimagic* sisi dari suatu graf $G(V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ adalah suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(G)$, berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j)$ adalah dua konstanta yang berbeda k_1 dan k_2 [1]. Jayasekaran, M. Regees dan C. Davidraj telah memperkenalkan pelabelan total *trimagic* sisi dari suatu graf $G(V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ adalah suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(G)$, berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j)$ adalah tiga konstanta yang berbeda k_1, k_2 dan k_3 [1]. Pada penelitian ini, penulis akan melakukan kajian tentang pelabelan total super *trimagic* sisi pada beberapa graf. Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pelabelan total super *trimagic* sisi pada beberapa graf.

II. PELABELAN TOTAL SUPER TRIMAGIC SISI

2.1 Pelabelan Total *Trimagic* Sisi

Definisi 3.1 Diberikan graf $G(V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$ yang selanjutnya ditulis $G(p, q)$. Suatu pelabelan total *trimagic* sisi pada graf $G(p, q)$ adalah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(G)$ berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$.

Contoh 3.1 Diberikan gambar dari graf G seperti pada gambar berikut.



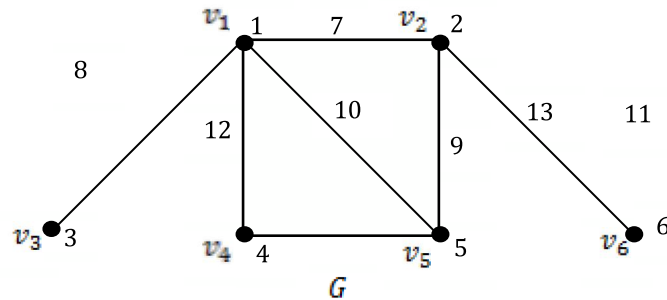
Gambar 3.1 Graf G

Pada Gambar 3.1, Graf G memiliki $|V(G)| = 6$ dan $|E(G)| = 7$. Graf G telah diberi label pada titik dan sisinya dengan label sebagai berikut. Label titik pada graf tersebut adalah $f(v_1) = 1$, $f(v_3) = 5$, $f(v_5) = 11$, $f(v_2) = 2$, $f(v_4) = 8$, $f(v_6) = 6$. Label sisi pada graf tersebut adalah $f(v_1 v_2) = 7$, $f(v_1 v_4) = 12$, $f(v_2 v_5) = 9$, $f(v_4 v_5) = 3$, $f(v_1 v_3) = 4$, $f(v_1 v_5) = 10$, $f(v_2 v_6) = 13$. Oleh karena terdapat tiga konstanta yang berbeda $k_1 = 10$, $k_2 = 21$ dan $k_3 = 22$, maka terbukti bahwa pelabelan pada graf G memenuhi pelabelan total *trimagic* sisi.

2.2 Pelabelan Total Super Trimagic Sisi

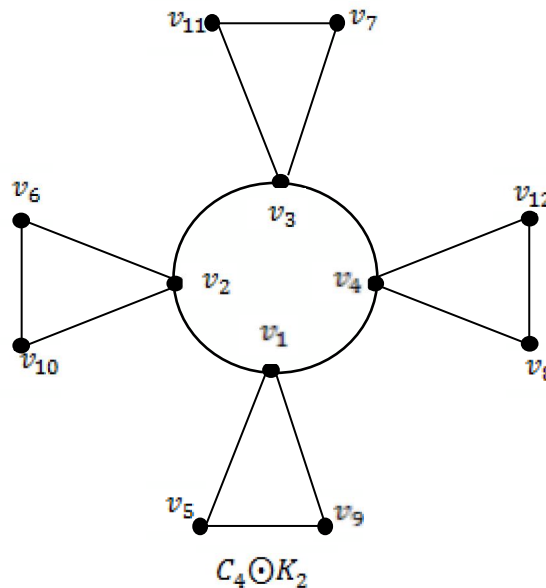
Definisi 3.2 Suatu pelabelan total super trimagic sisi pada graf $G(p, q)$ adalah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $v_i v_j \in E(G)$ berlaku $f(v_i) + f(v_i v_j) + f(v_j) \in \{k_1, k_2, k_3\} \subseteq \{6, 7, \dots, 3(p + q) - 3\}$ dan $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{1, 2, \dots, p\}$.

Contoh 3.2 Diberikan gambar dari graf G pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Graf G

Pada Gambar 3.2, Graf G memiliki $|V(G)| = 6$ dan $|E(G)| = 7$. Graf G telah diberi label pada titik dan sisinya dengan label sebagai berikut. Label titik pada graf : $f(v_1) = 1, f(v_3) = 3, f(v_5) = 5, f(v_2) = 2, f(v_4) = 4, f(v_6) = 6$. Label sisi pada graf : $f(v_1 v_2) = 8, f(v_1 v_4) = 10, f(v_2 v_5) = 13, f(v_4 v_5) = 11, f(v_1 v_3) = 7, f(v_1 v_5) = 9, f(v_2 v_6) = 12$. Oleh karena terdapat tiga konstanta yang berbeda $k_1 = 11, k_2 = 15$ dan $k_3 = 20$ dan himpunan label titik $f(V)$ dapat dinyatakan dengan $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ maka terbukti bahwa pelabelan pada graf G memenuhi pelabelan total supertrimagic sisi. Berikut ini dibahas teorema-teorema mengenai pelabelan total super trimagic sisi pada graf $C_n \odot K_2, P_n \times P_3$ untuk n ganjil, Q_n dan $A(TS_n)$.



Gambar 3.3 Graf $C_4 \odot K_2$

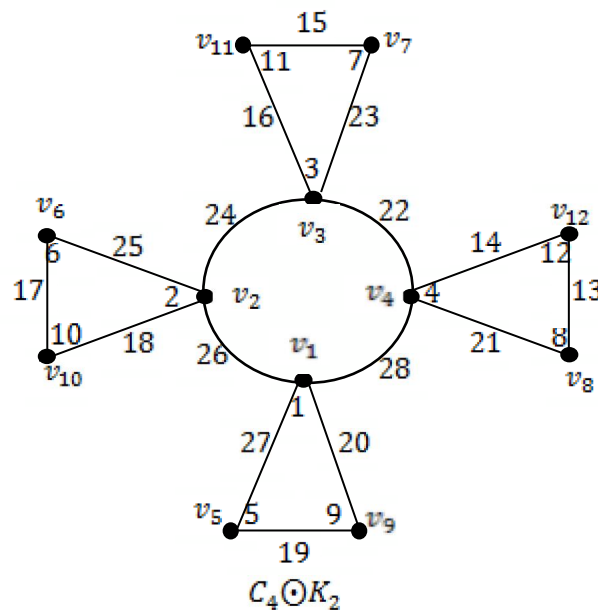
Definisi 3.3 Graf $C_n \odot K_2$ adalah graf yang diperoleh dari graf Cycle C_n dengan menambahkan n salinan graf K_2 dan menghubungkan setiap titik pada salinan ke i graf K_2 dengan sebuah sisi pada titik ke i dalam cycle.

Suatu graf $C_n \odot K_2$ memiliki $3n$ titik dan $4n$ sisi. Contoh berikut mengilustrasikan suatu graf yang dibentuk dari graf Cycle dan graf komplit.

Contoh 3.3 Diberikan gambar graf G pada Gambar 3.3. Pada Gambar 3.3, Graf $C_4 \odot K_2$ memiliki $|V(C_4 \odot K_2)| = 12$ dan $|E(C_4 \odot K_2)| = 16$. Himpunan titik ditunjukkan oleh $V(C_4 \odot K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$ dan himpunan sisi ditunjukkan oleh $E(C_4 \odot K_1) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$ dengan $E_1 = \{v_1 v_5, v_1 v_6, v_1 v_7, v_1 v_8\}$, $E_2 = \{v_1 v_9, v_1 v_{10}, v_1 v_{11}, v_1 v_{12}\}$, $E_3 = \{v_5 v_9, v_6 v_{10}, v_7 v_{11}, v_8 v_{12}\}$, $E_4 = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4\}$, dan $E_5 = \{v_4 v_1\}$.

Teorema 3.1 Graf $C_n \odot K_2$ merupakan graf dengan pelabelan total super trimagic sisi.

Contoh 3.4 Diberikan suatu graf $C_n \odot K_2$ dengan $n = 4$ adalah graf dengan pelabelan total super trimagic sisi. Gambar 3.4 mengilustrasikan graf $C_4 \odot K_2$ dengan $k_1 = 33, k_2 = 30$ dan $k_3 = 29$.

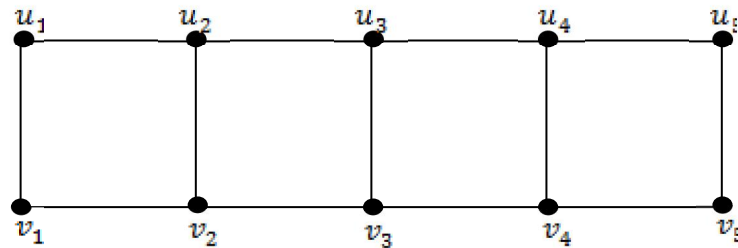


Gambar 3.4 Graf $C_4 \odot K_2$ dengan $k_1 = 33, k_2 = 30$ dan $k_3 = 29$

Definisi 3.4 Cartesian Product dari graf $G_a(V_a, E_a)$ dan $G_b(V_b, E_b)$ adalah graf $G(V, E)$ ditulis $G = G_a \times G_b$ jika $V = V(G_a) \times V(G_b)$ dan dua titik (u_a, u_b) dan (v_a, v_b) di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku $u_a = v_a$ dan $u_b v_b \in E(G_b)$ atau $u_b = v_b$ dan $u_a v_a \in E(G_a)$.

Definisi 3.5 Hasil kali Kartesius dari path P_2 dan path P_n disebut graf ladder dan dinotasikan dengan $(P_n \times P_2)$. Himpunan titik dari graf ladder $V(P_n \times P_2) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \times P_2) = \{u_i u_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i; 1 \leq i \leq n\}$.

Contoh 3.5 Gambar 3.5 mengilustrasikan Graf Ladder $P_5 \times P_2$.

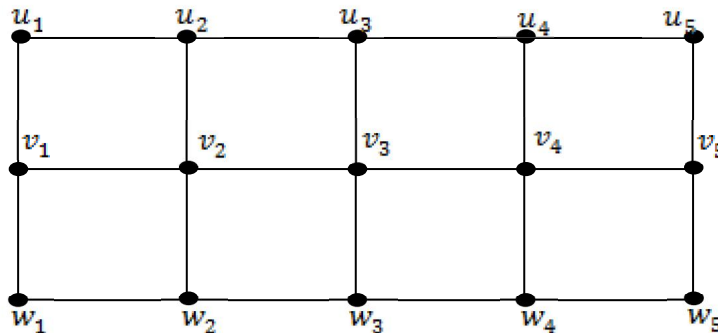


Gambar 3.5 Graf Ladder $P_5 \times P_2$

Definisi 3.6 Graf Double ladder L_n adalah graf $P_n \times P_3$ dengan himpunan titik dari graf double ladder $V(P_n \times P_3) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \times P_3) = \{u_i v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{w_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Graf $P_n \times P_3$ memiliki $3n$ titik dan $5n - 3$ sisi. Contoh berikut mengilustrasikan suatu graf Double Ladder.

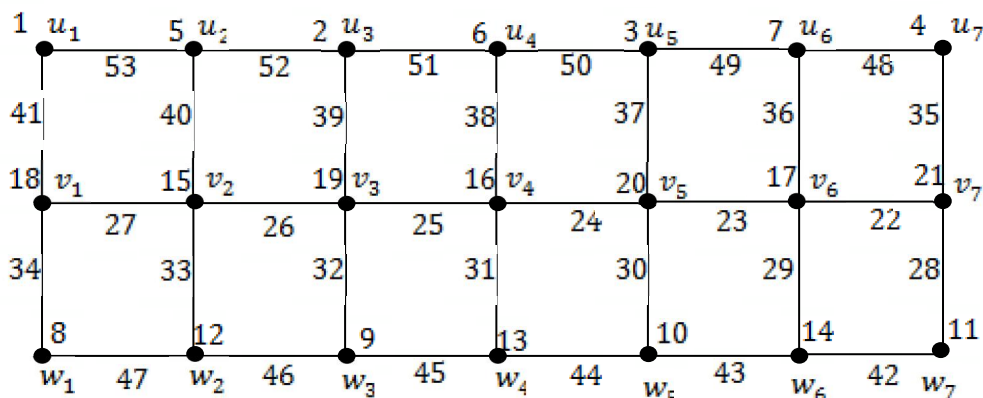
Contoh 3.6 Gambar 3.6 mengilustrasikan graf Double Ladder $P_5 \times P_3$.



Gambar 3.6 Graf Double Ladder $P_5 \times P_3$

Teorema 3.2 Graf Double ladder $P_n \times P_3$ merupakan graf dengan pelabelan total super trimagic sisi untuk n ganjil.

Contoh 3.7 Diberikan suatu graf $P_n \times P_3$ dengan $n = 7$ adalah graf dengan pelabelan total super trimagic sisi. Graf $P_7 \times P_3$ diilustrasikan oleh Gambar 3.7.



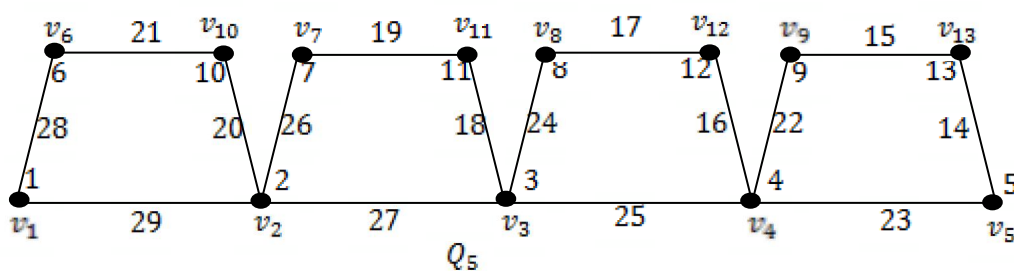
Gambar 3.7 Graf $P_7 \times P_3$ dengan $k_1 = 60, k_2 = 59$ dan $k_3 = 67$

Definisi 3.5 Graf *Quadrilateral snake* Q_n adalah graf yang diperoleh dari sebuah path v_1, v_2, \dots, v_n dengan menghubungkan titik v_i, v_{i+1} ke titik-titik baru v_{n+i}, v_{n+i+1} berturut-turut dan kemudian menghubungkan titik v_{n+i} dan v_{n+i+1} .

Graf Q_n memiliki $3n - 2$ titik dan $4n - 4$ sisi.

Teorema 3.3 Graf *Quadrilateral snake* Q_n merupakan graf dengan pelabelan total super trimagic sisi.

Contoh 3.8 Diberikan suatu graf Q_n dengan $n = 5$ adalah graf dengan pelabelan total super trimagic sisi. Graf Q_5 dengan $k_1 = 35, k_2 = 37$ dan $k_3 = 32$ diilustrasikan oleh Gambar 3.8.

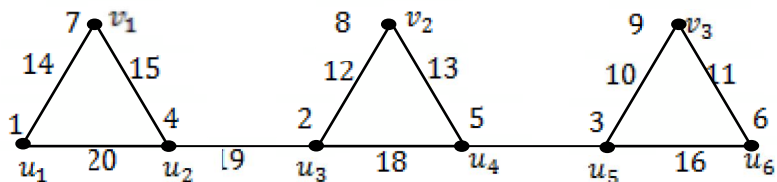


Gambar 3.8 Graf Q_5 dengan $k_1 = 35, k_2 = 37$ dan $k_3 = 32$

Definisi 3.8 Graf *Alternate triangular snak* $eA(TS_n)$ adalah graf yang diperoleh dari suatu path u_1, u_2, \dots, u_n dengan menghubungkan u_i dan u_{i+1} (alternatively) ke titik baru v_i . Hal tersebut merupakan setiap sisi alternatif dari suatu path yang digantikan oleh C_3 .

Teorema 3.4 Graf *Alternate triangular snake* $A(TS_n)$ merupakan graf dengan pelabelan total super trimagic sisi untuk n genap.

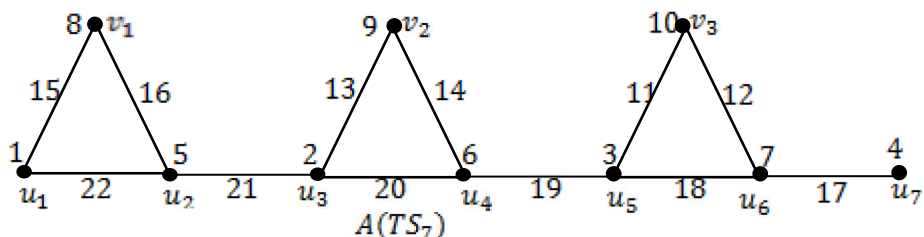
Contoh 3.9 Diberikan suatu graf $A(TS_n)$ dengan $n = 6$ adalah graf dengan pelabelan total super *trimagic* sisi untuk segitiga dimulai dari u_1 . Graf $A(TS_6)$ untuk segitiga dengan $k_1 = 25, k_2 = 22$ dan $k_3 = 26$ diilustrasikan oleh Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Graf $A(TS_6)$ untuk segitiga dengan $k_1 = 25, k_2 = 22$ dan $k_3 = 26$

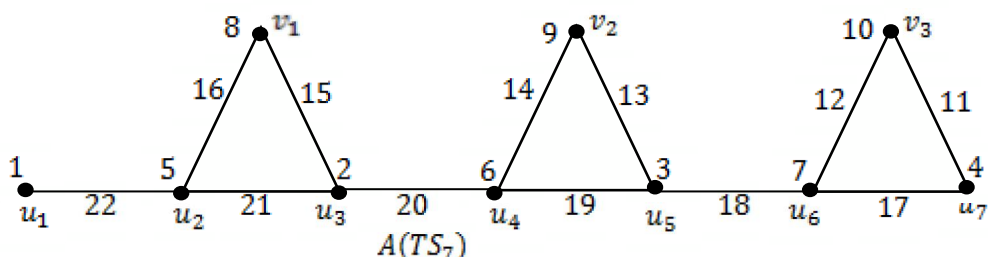
Teorema 3.5 Graf $A(TS_n)$ merupakan graf dengan pelabelan total super *trimagic* sisi untuk n ganjil.

Contoh 3.10 Diberikan suatu graf $A(TS_n)$ dengan $n = 7$ adalah graf dengan pelabelan total super *trimagic* sisi untuk segitiga dimulai dari u_1 . Graf $A(TS_7)$ untuk segitiga yang dimulai dari u_1 dengan $k_1 = 28, k_2 = 24$ dan $k_3 = 29$ diilustrasikan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Graf $A(TS_7)$ untuk segitiga yang dimulai dari u_1 dengan $k_1 = 28, k_2 = 24$ dan $k_3 = 29$

Contoh 3.11 Diberikan suatu graf $A(TS_n)$ dengan $n = 7$ adalah graf dengan pelabelan total super *trimagic* sisi untuk segitiga dimulai dari u_2 . Graf $A(TS_7)$ untuk segitiga yang dimulai dari u_2 dengan $k_1 = 28, k_2 = 25$ dan $k_3 = 29$ diilustrasikan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Graf $A(TS_7)$ untuk segitiga yang dimulai dari u_2 dengan $k_1 = 28, k_2 = 25$ dan $k_3 = 29$

III. KESIMPULAN

Berdasarkan definisi-definisi yang telah diberikan pada pembahasan bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa menentukan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a dengan memberikan label yang memenuhi pelabelan total *trimagic* sisi dimana himpunan label titiknyadapat dinyatakan dengan $f(V) = \{f(v) | v \in V\} = \{a + 1, a + 2, \dots, a + p\}$ dimana $0 \leq a \leq q$. Beberapa graf yang merupakan graf dengan pelabelan total *trimagic* sisi terurut titik-a, diantaranya yaitu :

1. Graf $\langle B_{m,n}; 2 \rangle$ untuk $m, n \geq 1$
2. Graf $\langle K_{1,n}; 3 \rangle$ untuk $n \geq 3$
3. Graf $C_n \odot K_1$
4. Graf $G(v; nP_3)$ untuk n genap
5. Graf $K_{1,p} \cup K_{1,q} \cup K_{1,r}$
6. Graf $P_3 \odot \bar{K}_n$ untuk n genap
7. Graf $C_n \odot K_2$
8. Graf F_n untuk n genap.

REFERENSI

- [1] C. Jayasekaran, M. Regees and C. Davidraj. 2013. Edge Trimagic Labeling of Some Graph. *International Journal of Combinatorial Graph Theory and Applications*. Vol. 6. PP. 175-186.
- [2] Garry Chartrand and Ortrud R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapore : Mcgraw Hill.
- [3] Frank Harary. 1969. *Graph Theory*. Boston : Addison Wesley.
- [4] M.Regees and and C. Jayasekaran. 2013. Super Edge Trimagic Total Labeling of Graphs. *International Journal of Mathematical Archive*. 4(12). PP. 156-164.
- [5] Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. New York : Springer Science.