JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 1 (June 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

ANALISIS BEBERAPA TEOREMA KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF (MULTIPLICATIVE METRIC SPACES)

Malahayati

Program Studi Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
JL. Laksda Adisucipto No.1 Yogyakarta
Email : malahayati???

Abstract. This research was conducted to analyze several theorems about fixed point uniqueness on multiplicative metric space. Firstly, the proof of fixed point uniqueness theorem on complete multiplicative metric space is analyzed with involving multiplicative continuous functions. Then, several fixed point uniqueness theorems is analyzed without involving multiplicative continuous functions. The proof of fixed point uniqueness theorem on complete multiplicative metric space with involving multiplicative continuous functions can be done without requirement of contraction multiplicative mapping. If this mapping is satisfying a condition with involving multiplicative continuous functions then it was proven that it had the unique fixed point. Furthermore, the proof of fixed point uniqueness theorem on complete multiplicative metric space without involving multiplicative continuous functions can be done by requiring the mapping is contraction.
Keywords: Multiplicative metric space, Complete multiplicative metric space, multiplicative continuous functions, Contraction multiplicative mapping

Abstrak. Penelitian ini menganalisa beberapa teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif. Pembahasan diawali dengan menganalisa pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan melibatkan bantuan fungsi kontinu multiplikatif. Selanjutnya di analisa beberapa teorema ketunggalan titik tetap tanpa melibatkan fungsi kontinu multiplikatif. Pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dapat dibuktikan tanpa mensyaratkan pemetaannya kontraksi multiplikatif. Apabila pemetaan tersebut memenuhi suatu kondisi dengan bantuan suatu fungsi kontinu multiplikatif maka terbukti mempunyai titik tetap tunggal. Sedangkan Pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap tanpa bantuan fungsi kontinu multiplikatif dibuktikan dengan mensyaratkan pemetaannya kontraksi.
Kata kunci: Ruang metrik multiplikatif, Ruang metrik multiplikatif lengkap, Fungsi kontinu multiplikatif, Pemetaan kontraksi multiplikatif.

I. PENDAHULUAN

Teorema titik tetap Banach merupakan teorema ketunggalan titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik lengkap ke dalam dirinya sendiri. Ruang metrik memperjelas konsep jarak, definisi dari metrik bermanfaat untuk mengetahui aplikasi yang lebih umum dari konsep jarak. Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan real $\mathbb{R}$. Di dalam bilangan real $\mathbb{R}$, didefinisikan fungsi jarak, yaitu memasangkan $d(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{R}$ selanjutnya, d disebut fungsi jarak di $\mathbb{R}$.

Konsep jarak dalam kalkulus di perluas ke kalkulus multiplikatif yang dikenalkan pertama kali oleh Bashirov dkk, [1]. Bashirov dkk mengenalkan konsep derivative multiplikatif dan integral multiplikatif serta aplikasinya dilanjutkan dengan mengenalkan konsep jarak multiplikatif. Diawali dengan mendefinisikan nilai mutlak multiplikatif berikut ini.

Diberikan bilangan $x \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, nilai mutlak multiplikatif x yang dinotasikan dengan $|x|^*$ didefinisikan dengan

$$|x|^* = \begin{cases} x, & untuk\ x \geq 1 \\ \frac{1}{x}, & untuk\ x < 1 \end{cases}$$

Selanjutnya, jarak multiplikatif $x,y \in \mathbb{R}^+$ yang dinotasikan dengan $d^*(x,y)$ didefinisikan dengan

$$d^*(x,y) = \left|\frac{x}{y}\right|^*.$$

Hal inilah yang menjadi motivasi lahirnya definisi ruang metrik multiplikatif yang dikenalkan oleh Ozavsar dan Cevikel [4]. Ozavsar dan Cevikel juga mengenalkan konsep pemetaan kontraksi multiplikatif dan membuktikan beberapa teorema titik tetap dari pemetaan tersebut di ruang metrik multiplikatif lengkap. Selanjutnya Sarwar dan Badshah [7] membahas beberapa teorema titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap yang lain dengan memodifikasi kondisi pada teorema yang telah di bahas pada [4]. Akan tetapi dalam jurnal tersebut tidak diberikan bukti secara mendetail oleh karenanya peneliti tertarik untuk membahas teorema tersebut secara mendetail dan sekaligus memberikan beberapa contoh agar mudah dalam memahami konsep yang telah dibahas.

Mengkaji dan membahas penelitian yang dilakukan oleh Sarwar dan Badshah dianggap perlu dan penting, karena merupakan penelitian yang baru dan berbeda dari penelitian sebelumnya, serta dalam jurnal tersebut pembahasan tentang ruang metrik multiplikatif dan pembuktian teorema titik tetap masih sangat singkat, dan minimnya contoh.

II. RUANG METRIK MULTIPLIKATIF

Pada bagian ini akan dibahas tentang konsep ruang metrik multiplikatif. Beberapa definisi dan sifat-sifat dasar ruang metrik multiplikatif yang mendukung pembuktian teorema ketunggalan titik tetap akan dibahas terlebih dahulu.

Definisi ruang metrik multiplikatif tidak begitu berbeda dengan ruang metrik yang telah dikenal. Perbedaan signifikan terletak pada definisi metrik multiplikatif yang bernilai lebih dari atau sama dengan satu sedangkan ruang metrik pada umumnya bernilai lebih dari atau sama dengan nol. Lebih jelasnya berikut diberikan definisi ruang metrik multiplikatif.

Definisi 2.1. Ruang Metrik multiplikatif [4]. *Diberikan himpunan tak kosong X. Pemetaan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi*

(1) $d(x,y) \geq 1$ *untuk setiap* $x,y \in X$;
(2) $d(x,y) = 1$ *jika dan hanya jika* $x = y$ *untuk setiap* $x,y \in X$;
(3) $d(x,y) = d(y,x)$ *untuk setiap* $x,y \in X$;
(4) $d(x,z) \leq d(x,y).d(y,z)$ *untuk setiap* $x,y,z \in X$.

disebut metrik multiplikatif pada X. Selanjutnya pasangan (X,d) disebut ruang metrik multiplikatif.

Berikut diberikan contoh ruang metrik multiplikatif agar lebih memudahkan dalam memahami definsi di atas.

Contoh 2.2 Diberikan himpunan tak kosong X dan (X, d) merupakan ruang metrik. Selanjutnya didefinisikan pemetaan pada X, yaitu $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$\rho(x, y) = a^{d(x,y)} = \begin{cases} 1 & jika\ x = y \\ a & jika\ x \neq y \end{cases}$$

dengan bilangan $a > 1$, dapat dibuktikan (X, ρ) adalah ruang metrik multiplikatif.

Bukti:

Diambil sebarang $x, y \in R$ dan bilangan $a > 1$.

(i) Akan dibuktikan $\rho(x,y) \geq 1$. Berdasarkan definisi ρ di atas, jelas bahwa $\rho(x,y) \geq 1$.

(ii) Akan dibuktikan $\rho(x,y) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$. Berdasarkan definisi ρ di atas, jelas bahwa $\rho(x,y) = 1 \iff x = y$.

(iii) Akan dibuktikan $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Berdasarkan definisi ρ di atas, jelas bahwa $\rho(x,y) = a^{d(x,y)} = a^{d(y,x)} = \rho(y,x)$.

(iv) Akan dibuktikan $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$.

Berdasarkan definisi ρ di atas,

a) Untuk $x = z,\ x = y$, dan $y = z$

$\rho(x,z) = 1 = 1 \cdot 1 = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$
$\rho(x,z) = 1 = 1 = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$
$\rho(x,z) = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$

b) Untuk $x = z,\ x \neq y$ dan $y \neq z$

$\rho(x,z) = 1 < a \cdot a = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$d_a(x,z) = 1 < a^2 = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) < \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$

c) Untuk $x \neq z,\ x \neq y$ dan $y = z$

$\rho(x,z) = a = a \cdot 1 = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) = a = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$

d) Untuk $x \neq z,\ x = y$ dan $y \neq z$

$\rho(x,z) = a = 1 \cdot a = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) = a = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$

e) Untuk $x \neq z,\ x \neq y$ dan $y \neq z$

$\rho(x,z) = a \leq a \cdot a = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) = a \leq a^2 = \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$, untuk $a > 1$
$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$

Dari a), b), c), d) dan e) diperoleh bahwa

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) \cdot \rho(y,z)$$

Jadi berdasarkan (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti bahwa $\rho(x,y)$ adalah ruang metrik multiplikatif. ■

Selanjutnya diberikan definisi nilai mutlak multiplikatif, dilanjutkan dengan suatu lemma ketidaksamaan segitiga multiplikatif. Definisi ini berbeda dengan definisi nilai mutlak di real, nilai mutlak multiplikatif memiliki nilai lebih dari atau sama dengan 1.

Definisi 2.3 Nilai Mutlak Multiplikatif [7]. *Diberikan* $a \in \mathbb{R}^{+}$*, nilai mutlak multiplikatif dinotasikan* $|\cdot|^{*}$ *didefinisikan dengan*

$$| a |^{*} = \begin{cases} a & , a \geq 1; \\ \frac{1}{a} & , a < 1. \end{cases}$$

Lemma 2.4 [4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif* (X, d)*. Ketidaksamaan berikut benar*

$$\left|\frac{d(x,z)}{d(y,z)}\right|^{*} \leq d(x,y)$$

untuk setiap $x, y, z \in X$

Bukti:
Berdasarkan ketidaksamaan segitiga multiplikatif diperoleh

$$d(x,z) \leq d(x,y) \cdot d(y,z)$$

sehingga didapat

$$\frac{d(x,z)}{d(y,z)} \leq d(x,y) \tag{2.1}$$

$$d(y,z) \leq d(y,x) \cdot d(x,z)$$

sehingga didapat

$$\frac{1}{d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{d(y,z)} \tag{2.2}$$

berdasarkan definisi dari $|\cdot|^{*}$, persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) diperoleh

$$\frac{1}{d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{d(y,z)} \leq d(x,y)$$

$$\left|\frac{d(x,z)}{d(y,z)}\right|^{*} \leq d(x,y) \tag{2.3}$$

Kemudian (2.3) disebut dengan **ketidaksamaan segitiga invers multiplikatif**. ■

Berikut diberikan definisi fungsi kontinu dan barisan di ruang metric multiplikatif yang akan digunakan dalam pembuktian teorema ketunggalan titik tetap yang melibatkan fungsi kontinu.

Definisi 2.5 Fungsi Kontinu Multiplikatif [4]. *Diberikan* (X, d) *dan* (Y, p) *adalah masing-masing ruang metrik multiplikatif dan* $A \subseteq X$*. Fungsi* $f: (X, d) \to (Y, p)$ *dikatakan kontinu di* $a \in A$*, apabila untuk setiap* $\varepsilon > 1$*, terdapat* $\delta > 1$ *sehingga untuk setiap* $x \in A$ *dengan* $d(x, a) < \delta$ *berlaku*

$$p\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Definisi 2.6 Barisan Konvergen Multiplikatif [4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif* (X, d) *dan barisan* $\{x_n\} \subseteq X$*. Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan konvergen multiplikatif ke* $x \in X$ *apabila untuk setiap* $\varepsilon > 1$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk semua* $n \geq n_0$ *berlaku*

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Barisan $\{x_n\}$ *konvergen multiplikatif ke* x *dinotasikan dengan* $x_n \to_{*} x (n \to \infty)$.

Teorema berikut tentang kekonvergenan subbarisan di ruang metric multiplikatif.

Teorema 2.7 [4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif (M, d) dan $\{x_n\} \subseteq X$. Apabila $\{x_n\}$ konvergen multiplikatif ke x maka setiap subbarisannya konvergen multiplikatif ke x.*

Bukti:
Diberikan (M, d) adalah ruang metrik multiplikatif dan $\{x_n\}$ barisan didalam M. Diketahui $x_n \to_* x$ artinya $\forall \varepsilon > 1$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.Ambil sebarang subbarisan dari $\{x_n\}$ katakanlah $\{x_{n_k}\}$ sehingga didapatkan $n_1 < n_2 <\ldots< n_k <\ldots$ Akan ditunjukkan $x_{n_k} \to_* x$
Ambil sebarang $\varepsilon > 1$. Karena $n_1 < n_2 <\ldots< n_k <\ldots$ adalah bilangan bulat yang naik tegas, maka berlaku $n_k \geq n$. Karena $x_n \to_* x$ berarti untuk setiap $n \geq n_0$ mengakibatkan $n_k \geq n_0$. Oleh karena itu berlaku $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, jadi terbutki $x_{n_k} \to_* x$. ■

Definisi 2.8 Barisan Cauchy Multiplikatif [4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif (X, d) dan barisan $\{x_n\} \subseteq X$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan Cauchy multiplikatif ke $x \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 1$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $m,n \geq n_0$ berlaku*
$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definisi 2.9 Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap [4]. *Ruang metrik multiplikatif (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy multiplikatif di X konvergen multiplikatif di X.*

Definisi 2.10 Barisan Terbatas Multiplikatif [4]. *Diberikan (M, d) ruang metrik multiplikatif dan $\{x_n\} \subset M$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan terbatas apabila terdapat $M > 1$ sedemikian hingga $|x_n|^* \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.*

Selanjutnya diberikan toerema yang menyatakan hubungan antara barisan Cauchy multiplikatif dan barisan terbatas multiplikatif.

Teorema 2.11. [4]. *Diberikan (M, d) adalah ruang metrik multiplikatif dan $\{x_n\}$ barisan Cauchy multiplikatif di M maka $\{x_n\}$ barisan terbatas multiplikatif di M.*

Bukti: Diberikan (M, d) adalah ruang metrik multiplikatif dan $\{x_n\}$ barisan Cauchy multiplikatif di M. Berdasarkan definisi barisan Cauchy multiplikatif berarti untuk $\mathcal{E} = 2 > 1$, terdapat bilangan asli n_0 dengan demikian $d(x_n, x_m) < 2$ untuk setiap $m, n \geq n_0$. Kemudian dengan asumsi $m > n$ dibentuk himpunan
$$K = \max\{2, d(x_n, x_m), d(x_{n-1}, x_{m-1}), \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\},$$
Maka jelas $d(x_n, x_{n_0}) < K$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) \cdot d(x_{n_0}, x_m) < K^2$, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$. Jadi barisan $\{x_n\}$ adalah barisan terbatas multiplikatif. ■

Definisi 2.12. [4] Diberikan ruang metrik multiplikatif (M, d), pemetaan $T: M \to M$ dinamakan kontraksi multiplikatif jika terdapat bilangan konstan $\tau \in [0,1)$ sedemikian hingga
$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)^\tau, \quad \forall\, x, y \in M$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas hasil dari penelitian ini. Pembahasan dimulai dengan membuktikan suatu teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu. Selanjutnya dibuktikan teorema lainnya, bedanya adalah tidak melibatkan fungsi kontinu multiplikatif. Dilanjutkan dengan membahas contohnya.

Teorema 3.1 [7]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif lengkap* (M,d). *Jika fungsi* $T: M \to M$ *memenuhi*

$$d(Tu,Tv) \leq \frac{\left(d(u,Tu)\cdot d(v,Tv)\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u,Tu),d(v,Tv)\right)} \tag{3.1}$$

untuk setiap $u,v \in M$, *dan* $\varphi : [1,\infty)\times[1,\infty) \to [1,\infty)$ *adalah fungsi kontinu dengan* $\varphi(x,y) = 1$ *untuk* $x = y = 1$ *maka* T *memiliki titip tetap tunggal di* M.

Bukti:
Teorema titik tetap Banach merupakan suatu prosedur untuk menyatakan keberadaan dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan, yang disebut iterasi. Dengan metode ini untuk sembarang $u_0 \in M$ dalam suatu himpunan didefinisikan barisan rekursif $u_0, u_1, u_2, \ldots$. yakni

$$u_{n+1} = Tu_n$$

Dengan $n = 0,1,2,3,\ldots$. sehingga diperoleh

$$u_1 = Tu_0$$
$$u_2 = Tu_1$$
$$u_3 = Tu_2$$
$$\vdots$$

Jadi jelas barisan $\{u_n\}$ dapat di kontruksi menjadi

$$u_{n+1} = Tu_n = T^{n+1}u_0 \tag{3.2}$$

untuk setiap $n \geq 0$.

Jika untuk beberapa bilangan asli n, $u_n = u_{n+1}$ maka jelas bahwa u_n adalah titik tetap dari T. Dari logika pikir diatas dapat dibuktikan secara lengkap sebagai berikut,

(1) Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+1}) = 1$. Pembuktiannya akan melibatkan barisan monoton dan barisan terbatas.
(2) Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+2}) = 1$. Pembuktiannya menggunakan hasil pada (1).
Pembuktian (1) dan (2) diatas digunakan dalam pembuktian selanjutnya.
(3) Akan ditunjukkan bahwa T memiliki titik periodik. Pembuktiannya melibatkan ketidaksamaan segitiga multiplikatif, barisan konvergen multiplikatif, barisan bagian multiplikatif dan barisan Cauchy multiplikatif.
(4) Akan ditunjukkan bahwa T memiliki titik tetap di M.
(5) Akan ditunjukkan T memiliki titik tetap tunggal di M.

Bukti lengkapnya sebagai berikut. Andaikan $u_n \neq u_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$, untuk mendiskusikan keadaan ini dapat dieksekusi dengan langkah-kangkah dibawah ini:
Langkah ke-1. Akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+1}) = 1. \tag{3.3}$$

Subtitusikan $u = u_n$ dan $v = u_{n-1}$ di persaman (3.1), dan dengan menggunakan sifat dari fungsi φ diperoleh

$$d(Tu_n,Tu_{n-1}) \leq \frac{(d(u_n,Tu_n)\cdot d(u_{n-1},Tu_{n-1}))^{\frac{1}{2}}}{\varphi(d(u_n,Tu_n),d(u_{n-1},Tu_{n-1}))}$$

$$\begin{aligned} d(u_{n+1},u_n) &\leq \frac{(d(u_n,Tu_n)\cdot d(u_{n-1},Tu_{n-1}))^{\frac{1}{2}}}{\varphi(d(u_n,Tu_n),d(u_{n-1},Tu_{n-1}))} \\ &= \frac{(d(u_n,u_{n+1})\cdot d(u_{n-1},u_n))^{\frac{1}{2}}}{\varphi(d(u_n,u_{n+1}),d(u_{n-1},u_n))} \end{aligned}$$

Karena $\varphi(d(u_n,u_{n+1}),d(u_{n-1},u_n)) \geq 1$ dan dari Definisi 2.1 bagian (3) maka $d(u_n,u_{n+1}) = d(u_{n+1},u_n)$ diperoleh

$$d(u_{n+1},u_n) \leq \left(d(u_n,u_{n+1})\cdot d(u_{n-1},u_n)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(d(u_{n+1},u_n)\cdot d(u_{n-1},u_n)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Selanjutnya dengan menguadratkan kedua ruas dan membaginya dengan $d(u_{n+1},u_n)$ diperoleh,

$$\begin{aligned} & d(u_{n+1},u_n) \leq \left(d(u_{n+1},u_n)\cdot d(u_{n-1},u_n)\right)^{\frac{1}{2}}. \\ \Leftrightarrow\ & \left(d(u_{n+1},u_n)\right)^2 \leq \left(\left(d(u_{n+1},u_n)\cdot d(u_{n-1},u_n)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2. \\ \Leftrightarrow\ & \left(d(u_{n+1},u_n)\right)^2 \leq \left(d(u_{n+1},u_n)\cdot d(u_{n-1},u_n)\right). \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\left(d(u_{n+1},u_n)\right)^2}{d(u_{n+1},u_n)} \leq \frac{d(u_n,u_{n+1})\cdot d(u_{n-1},u_n)}{d(u_{n+1},u_n)} \\ \Leftrightarrow\ & d(u_{n+1},u_n) \leq\ d(u_n,u_{n-1}). \end{aligned}$$

untuk setiap $n \geq 1$. Oleh karena itu $\{d(u_{n+1},u_n)\}$ adalah barisan yang mononton turun dan berdasarkan sifat ruang metrik multiplikatif $d(u_{n+1},u_n) \geq 1$ maka $\{d(u_{n+1},u_n)\}$ terbatas ke bawah di 1 sehingga barisan $\{d(u_{n+1},u_n)\}$ konvergen ke suatu bilangan. Misalkan $\{d(u_{n+1},u_n)\}$ konvergen ke suatu bilangan r.

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+1}) = r$$

Dengan $n \to \infty$ di persamaan (3.1) dan menggunakan kekontinuan dari φ, didapatkan

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},u_n) \leq \frac{(\lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+1})\cdot \lim_{n\to\infty} d(u_{n-1},u_n))^{\frac{1}{2}}}{\varphi(\lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+1}),\lim_{n\to\infty} d(u_{n-1},u_n))} \\ \Leftrightarrow\ & r \leq \frac{(r\cdot r)^{\frac{1}{2}}}{\varphi(r,r)} \\ \Leftrightarrow\ & r \leq \frac{r}{\varphi(r,r)} \\ \Leftrightarrow\ & \varphi(r,r) \leq \frac{r}{r} = 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi fungsi φ bahwa $\varphi:[1,\infty)\times[1,\infty)\to[1,\infty)$, maka $\varphi(r,r) = 1$ sehingga karena $\varphi(x,y) = 1$ jika dan hanya jika $x = y = 1$ dengan demikian $r = 1$.

Jadi terbukti bahwa

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 1.$$

Langkah ke-2. Selanjutnya akan dibuktikan

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+2}) = 1 \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.1) didapatkan

$$d(Tu_{n+1}, u_{n-1}) = d(u_{n+2}, u_n) \leq \frac{\left(d(u_{n+1}, Tu_{n+1}) \cdot d(u_{n-1}, Tu_{n-1})\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u_{n+1}, Tu_{n+1}), d(u_{n-1}, Tu_{n-1})\right)} = \frac{\left(d(u_{n+1}, u_{n+2}) \cdot d(u_{n-1}, u_n)\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u_{n+1}, u_{n+2}), d(u_{n-1}, u_n)\right)}$$

Karena $\varphi\big(d(u_{n+1}, u_{n+2}), d(u_{n-1}, u_n)\big) \geq 1$ maka diperoleh

$$d(u_{n+2}, u_n) \leq \big(d(u_{n+1}, u_{n+2}).d(u_{n-1}, u_n)\big)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan $n \to \infty$ dan menggunakan persamaan (3.6) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d(u_{n+2}, u_n) \leq \left(\lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, u_{n+2}) \cdot \lim_{n\to\infty} d(u_{n-1}, u_n)\right)^{\frac{1}{2}} = (1 \cdot 1)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Berdasarkan Definisi 2.1 (1) maka $d(u_{n+2}, u_n) \geq 1$ untuk setiap $n \geq 0$ sehingga jelas bahwa

$$\lim_{n\to\infty} d(u_{n+2}, u_n) = 1$$

Jadi persamaan (3.5) terbukti.

Langkah ke-3. Selanjutnya pada langkah ini akan ditunjukkan bahwa T memiliki titik periodik. Pembuktiannya menggunakan kontradiksi dengan mengandaikan T tidak memiliki titik periodik, maka $\{u_n\}$ adalah titik yang jelas berbeda-beda, sehingga $u_n \neq u_m$ untuk setiap $n \neq m$. Sebelum membuktikan bahwa T memiliki titik periodik akan dibuktikan terlebih dahulu $\{u_n\}$ barisan Cauchy multiplikatif sehingga karena (M, d) adalah ruang metrik multiplikatif lengkap maka $\{u_n\}$ adalah barisan konvergen multiplikatif. Selanjutnya karena $\{u_n\}$ adalah barisan konvergen multiplikatif maka terdapat $w \in M$, sehingga $\{u_n\}$ konvergen multiplikatif ke w. Kemudian w ini lah yang akan dibuktikan sebagai titik periodik dari T.
Seperti halnya di atas akan dibuktikan bahwa $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy multiplikatif dengan cara kontradiksi. Andaikan $\{u_n\}$ bukan barisan Cauchy multiplikatif maka ada $\varepsilon > 1$ sehingga untuk bilangan bulat q ada bilangan bulat m, n dimana $m > n > q$ oleh karena itu

$$d(u_m, u_n) > \varepsilon \tag{3.6}$$

Untuk setiap bilangan bulat positif q, dengan memberikan m bilangan bulat terkecil yang lebih dari n maka untuk u_{m-1} berlaku

$$d(u_n, u_{m-1}) \leq \varepsilon \tag{3.7}$$

Dari persamaan (3.6), persamaan (3.7), dan menggunakan ketidaksamaan segitiga multiplikatif diperoleh

$$\begin{aligned} \varepsilon &< d(u_m, u_n) \\ &\leq d(u_m, u_{m-1}) \cdot d(u_{m-1}, u_n) \\ &\leq d(u_m, u_{m-2}) \cdot d(u_{m-2}, u_{m-1}) \cdot d(u_{m-1}, u_n) \\ &\leq d(u_m, u_{m-2}) \cdot d(u_{m-2}, u_{m-1}) \cdot \varepsilon \\ \Leftrightarrow \varepsilon &< d(u_m, u_n) \\ &\leq d(u_m, u_{m-2}) \cdot d(u_{m-2}, u_{m-1}) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan mengambil nilai limit $m, n \to \infty$ dan menggunakan persamaan (3.3) dan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \lim_{m,n\to\infty} d(u_m, u_n) \\ &\leq \lim_{m,n\to\infty} d(u_m, u_{m-2}) \cdot \lim_{m,n\to\infty} d(u_{m-2}, u_{m-1}) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

$$\varepsilon < \lim_{m,n\to\infty} d(u_m, u_n) \leq 1 \cdot 1 \cdot \varepsilon$$
$$\varepsilon < \lim_{m,n\to\infty} d(u_m, u_n) \leq \varepsilon$$

Dengan demikian

$$\lim_{m,n\to\infty} d(u_m, u_n) = \varepsilon. \tag{3.8}$$

Subtitusikan $u = u_{m-1}$ dan $v = u_{n-1}$, hal ini bermaksud untuk mendapatkan $d(u_m, u_n)$ di persamaan (3.1) sehingga

$$d(Tu_{m-1}, Tu_{n-1}) \leq \frac{\left((d(u_{m-1}, Tu_{m-1}) \cdot d(u_{n-1}, Tu_{n-1})\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u_{m-1}, Tu_{m-1}), d(u_{n-1}, Tu_{n-1})\right)}$$

$$\Leftrightarrow d(u_m, u_n) \leq \frac{\left((d(u_{m-1}, u_m) \cdot d(u_{n-1}, u_n)\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u_{m-1}, u_m), d(u_{n-1}, u_n)\right)}.$$

Karena $\varphi\left(d(u_{m-1}, u_m), d(u_{n-1}, u_n)\right) \geq 1$, maka diperoleh

$$d(u_m, u_n) \leq \left((d(u_{m-1}, u_m) \cdot d(u_{n-1}, u_n)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Dengan mengambil nilai limit $m, n \to \infty$ di persamaan (3.9) dan menggunakan persamaan (3.3) dan persamaan (3.8) diperoleh

$$\lim_{m,n\to\infty} d(u_m, u_n) \leq \left(\lim_{m,n\to\infty} (d(u_{m-1}, u_m) \cdot \lim_{m,n\to\infty} d(u_{n-1}, u_n)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq (1 \cdot 1)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Sehingga kontradiksi dengan $\varepsilon > 1$. Sehingga $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy multiplikatif. Sehingga benar bahwa $\{u_n\}$ konvergen multiplikatif kesuatu bilangan $w \in M$. Selanjutnya subtitusikan $u = u_n$ dan $v = w$ pada persamaan (3.1) sehingga didapatkan

$$d(Tu_n, Tw) \leq \frac{\left(d(u_n, Tu_n) \cdot d(w, Tw)\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u_n, Tu_n), d(w, Tw)\right)}$$

$$\Leftrightarrow d(u_{n+1}, Tw) \leq \frac{\left(d(u_n, u_{n+1}) \cdot d(w, Tw)\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(u_n, u_{n+1}), d(w, Tw)\right)}. \tag{3.10}$$

Karena $\varphi(d(u_n, u_{n+1}), d(w, Tw)) \geq 1$ maka

$$d(u_{n+1}, Tw) \leq \left(d(u_n, u_{n+1}) \cdot d(w, Tw)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan mengambil nilai limit $n \to \infty$ dan menggunakan persamaan (3.3) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tw) \leq \left(\lim_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+1}) \cdot \lim_{n\to\infty} d(w, Tw)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tw) \leq \left(1 \cdot d(w, Tw)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tw) \leq \left(d(w, Tw)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) tersebut akan digunakan pada pembuktian selanjutnya. Sekarang akan dicari kontradiksi untuk asumsi bahwa T tidak memiliki titik periodik dengan mengikuti dua kasus berikut.

Kasus ke-1. Jika $u_n \neq w$ dan $u_n \neq Tw$ untuk setiap $n \geq 2$, maka dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga multiplikatif didapatkan
$d(w,Tw) \leq d(w,u_n) \cdot d(u_n,Tw) \Leftrightarrow d(w,Tw) \leq d(w,u_n) \cdot d(u_n,u_{n+1}) \cdot d(u_{n+1},Tw).$
Dengan melimitkan $n \to \infty$ maka $u_n \to_* w$ dan menggunakan persamaan (3.3) serta Definisi 2.1 (2) didapatkan

$$\begin{aligned} d(w,Tw) &\leq \lim_{n\to\infty} d(w,u_n) \cdot \lim_{n\to\infty} d(u_n,u_{n+1}) \cdot \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tw) \\ &\Leftrightarrow d(w,Tw) \leq d(w,w) \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tw) \\ &\Leftrightarrow d(w,Tw) \leq 1 \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tw) \\ &\Leftrightarrow d(w,Tw) \leq \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tw). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dari persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) diperoleh

$$d(w,Tw) \leq \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tw) \leq \big(d(w,Tw)\big)^{\frac{1}{2}}$$

Dimana berlaku hanya untuk $d(w,Tw) = 1$, berdasarkan Definisi 2.1 (2), itu menunjukan $Tw = w$ sehingga w adalah titik tetap dari T, oleh karena itu, w titik periodik dari T untuk periode $n = 1$. Dengan demikian kontradiksi dengan asumsi awal bahwa T tidak memiliki titik periodik.

Kasus ke-2. Jika $u_p = w$ atau $u_p = Tw$ untuk $p \geq 2,\ p \in N$, maka untuk kemungkinan $u_p = w$, $w = u_0$ dan berdasarkan iterasi diawal pada persamaan (3.2) diperoleh

$$u_p = w = u_0 \Longrightarrow T^p u_0 = u_0$$

sehingga u_0 adalah titik periodik dari T. Jika $u_p = Tw$ dan $w = u_0$ berdasarkan persamaan (3.2) maka diperoleh $Tu_0 = Tw = u_p = T^p u_0 = T^{p-1}(Tu_0)$, jadi Tu_0 adalah titik periodik dari T. Oleh karena itu terdapat kontradiksi untuk pernyataan bahwa T tidak memiliki titik periodik. Sekarang untuk setiap $n \geq 1$, dengan $u_p = w$ didapatkan

$$d(T^n w,w) = d\big(T^n u_p,w\big) = d(u_{n+p},w)$$

Atau dengan $u_p = Tw$ didapatkan

$$d(T^n w,w) = d(T^{n-1}Tw,w) = d\big(T^{n-1}u_p,w\big) = d(u_{n+p-1,}w)$$

Dalam dua pernyatan diatas untuk bilangan bulat $p \geq 2$ adalah tetap (tidak merubah persamaan). Jadi $\{u_{n+p}\}$ dan $\{u_{n+p-1}\}$ merupakan barisan bagian dari $\{u_n\}$ dan karena $\{u_n\}$ adalah barisan konvergen multiplikatif ke w di ruang metrik multiplikatif, berdasarkan Teorema 2.7 dua barisan bagian tersebut juga konvergen multiplikatif ke titik limit w yang sama, yaitu

$$\lim_{n\to\infty} d\big(u_{n+p},w\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(u_{n+p-1},w\big) = 1.$$

Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n w,w) = 1 \tag{3.13}$$

Karena $\{T^{n+1}w\}$ adalah barisan bagian dari $\{T^n w\}$, oleh karena itu

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}w,w) = 1 \tag{3.14}$$

Berdasarkan anggapan bahwa T tidak memiliki titik periodik, oleh karena itu $T^r w \neq T^s w$ untuk suatu $r,s \in N$ dengan $r \neq s$. Menggunakan ketidaksamaan segitiga invers multiplikatif maka

$$d(w,Tw) \leq d(T^{n+1}w,w) \cdot d(T^{n+1}w,Tw)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d(T^{n+1}w,w)} \leq \frac{d(T^{n+1}w,Tw)}{d(w,Tw)} \tag{3.15}$$

sehingga didapat

$$d(T^{n+1}w,Tw) \leq d(T^{n+1}w,w) \cdot d(w,Tw)$$

$$\frac{d(T^{n+1}w,Tw)}{d(w,Tw)} \leq d(T^{n+1}w,w) \tag{3.16}$$

Sehingga dari persamaan (3.15) dan (3.16) didapatkan,

$$\frac{1}{d(T^{n+1}w,w)} \leq \frac{d(T^{n+1}w,Tw)}{d(w,Tw)} \leq d(T^{n+1}w,w) \tag{3.17}$$

Kemudian dengan mengambil nilai limit dari persamaan (3.17) dan mengunakan hasil dari persamaan (3.14) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d(T^{n+1}w,w)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{d(T^{n+1}w,w)}{d(w,Tw)} \leq \lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}w,w)$$

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{d(T^{n+1}w,w)}{d(w,Tw)} \leq 1$$

Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(T^{n+1}w,w)}{d(w,Tw)} = 1.$$

Sehingga berdasarkan sifat dari limit didapatkan

$$\frac{\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}w,w)}{\lim_{n\to\infty} d(w,Tw)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}w,Tw) = \lim_{n\to\infty} d(w,Tw)$$

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}w,Tw) = d(w,Tw) \quad (3.18)$$

Sekarang dari persamaan (3.1) dengan mensubtitusikan $Tu = T^{n+1}w$ dan $Tv = Tw$ didapatkan

$$d(T^{n+1}w,Tw) \leq \frac{\{d(T^n w,T^{n+1}w) \cdot d(w,Tw)\}^{\frac{1}{2}}}{\varphi\{d(T^n w,T^{n+1}w),d(w,Tw)\}}$$

Kemudian dengan mengambi nilai limit $n \to \infty$ dan berdasarkan persamaan (3.3) dan persamaan (3.18) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}w,Tw) \leq \frac{\{\lim_{n\to\infty} d(T^n w,T^{n+1}w) \cdot \lim_{n\to\infty} d(w,Tw)\}^{\frac{1}{2}}}{\varphi\{\lim_{n\to\infty} d(T^n w,T^{n+1}w), \lim_{n\to\infty} d(w,Tw)\}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad d(w,Tw) \leq \frac{\{1 \cdot d(w,Tw)\}^{\frac{1}{2}}}{\varphi\{1,d(w,Tw)\}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad d(w,Tw) \leq \frac{\{d(w,Tw)\}^{\frac{1}{2}}}{\varphi\{1,d(w,Tw)\}}$$

Karena nilai dari $\varphi\{1,d(w,Tw)\} \geq 1$ maka diperoleh

$$d(w,Tw) \leq \{d(w,Tw)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Demikian diatas benar hanya jika $d(w,Tw) = 1$, sehingga berdasarkan Definisi 2.1(2) maka $d(w,Tw) = 1$ berlaku jika dan hanya jika $Tw = w$. Jadi w adalah titik periodik dari T.

Sehingga kontradiksi dengan pernyataan awal bahwa T tidak memiliki titik periodik. Oleh karena itu T memiliki titik periodik $w \in M$ dimana $T^p w = w$ untuk beberapa $p \geq 1$.

Langkah ke-4. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap. Setelah terbukti bahwa T memiliki titik periodik dimana $T^p w = w$ untuk beberapa $p \geq 1$ untuk $w \in M$. Sekarang jika $p = 1$ maka $Tw = w$ dengan demikian w adalah titik tetap dari T. Diasumsikan $p > 1$. Akan ditunjukkan bahwa $T^{p-1}w$ adalah titik tetap dari T. Dibuktikan dengan cara kontradiksi dengan mengandaikan $T^{p-1}w \neq T^p w$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.1 (2) maka $d(T^{p-1}w, T^p w) = 1$ jika dan hanya jika $T^{p-1}w = T^p w$ Sehingga karena tidak mungkin $d(T^{p-1}w, T^p w) = 1$ jelas bahwa $d(T^{p-1}w, T^p w) > 1$, kemudian

$$\varphi\big(d(T^{p-1}w, T^p w), d(\,T^{p-1}w, T^p w)\big) = 1$$

jika dan hanya jika

$$d(T^{p-1}w, T^p w) = d(\,T^{p-1}w, T^p w) = 1$$

maka karena $d(T^{p-1}w, T^p w) > 1$ jelas bahwa $\varphi\big(d(T^{p-1}w, T^p w), d(\,T^{p-1}w, T^p w)\big) > 1$.
Dengan menggunakan persamaan (3.1) dan persamaan (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned} d(w, Tw) &= d(T^p w, T^{p+1} w) \\ &= d(T(T^{p-1}w), T(T^p w)) \\ &\leq \frac{(d(T^{p-1}w, T^p w), d(T^p w, T(T^p w))^{\frac{1}{2}}}{\varphi(d(T^{p-1}w, T^p w), d(\,T^p w, T(T^p w)))} \end{aligned}$$

karena $d(T^{p-1}w, T^p w) > 1$ maka $\varphi\big(d(T^{p-1}w, T^p w), d(\,T^{p-1}w, T^p w)\big) > 1$,
sehingga diperoleh

$$d(w, Tw) < (d(T^{p-1}w, T^p w), d(T^p w, T(T^p w))^{\frac{1}{2}}$$

Karena T memiiki titik periodik sehingga $Tw = w$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} d(w, Tw) &< (d(T^{p-1}w, T^p w), d(T^p w, T(T^p w))^{\frac{1}{2}} \\ &= (d(T^{p-1}w, T^p w), d(w, Tw))^{\frac{1}{2}} \\ &= d(T^{p-1}w, T^p w)^{\frac{1}{2}}, d(w, Tw)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Karena $d(w, Tw) < d(w, Tw)^{\frac{1}{2}}$ tidak berlaku dan karena $d(T^{p-1}w, T^p w) > 1$, maka diperoleh

$$d(w, Tw) < d(T^{p-1}w, T^p w)^{\frac{1}{2}} < d(T^{p-1}w, T^p w) \tag{3.19}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1) didapatkan

$$\begin{aligned} d(T^{p-1}w, T^p w) &= d\big(T(T^{p-2}w), T(T^{p-1}w)\big) \\ &\leq \frac{\Big(d(T^{p-2}w,\, T(T^{p-2}w)) \cdot d\big(T^{p-1}w, T(T^{p-1}w)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\Big(d(T^{p-2}w, T^{p-1}w), d\big(T^{p-1}w, T(T^{p-1}w)\big)\Big)} \end{aligned}$$

Karena $\varphi\Big(d(T^{p-2}w, T^{p-1}w), d\big(T^{p-1}w, T(T^{p-1}w)\big)\Big) \geq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(T^{p-1}w, T^p w) &< \Big(d(T^{p-2}w,\, T(T^{p-2}w)) \cdot d\big(T^{p-1}w, T(T^{p-1}w)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= (d(T^{p-2}w,\, T^{p-1}w) \cdot d(T^{p-1}w,\, T^p w))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Karena $d(T^{p-1}w, T^p w) < d(T^{p-1}w,\, T^p w)^{\frac{1}{2}}$ tidak mungkin berlaku maka,

$$d(T^{p-1}w,\, T^p w) < d(T^{p-2}w,\, T^{p-1}w)^{\frac{1}{2}} < d(T^{p-2}w,\, T^{p-1}w) \tag{3.20}$$

Dengan melanjutkan langkah pada persamaan (3.19) dan menggunakan persamaan (3.20) diperoleh

$$\begin{aligned} d(w,Tw) &< d(T^{p-1}w,\ T^{p}w) < d(T^{p-2}w,\ T^{p-1}w) \\ &< d(T^{p-3}w,\ T^{p-2}w) < \cdots < d(w,Tw) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dari uraian pengandaian $T^{p-1}w \neq T^{p}w$ diperoleh pertidaksamaan pada (3.21) yang merupakan pertidaksamaan yang bernilai salah sehingga terjadi kontradiksi, oleh karena itu yang benar adalah $T^{p-1}w = T^{p}w = w$. Jadi w adalah titik tetap dari T.

Langkah ke-5. Selanjutnya akan dibuktikan ketunggalan titik tetap dari T. Andaikan titik tetap dari T tidak tunggal, maka ada $a, b \in M$ dimana $a \neq b$ yang merupakan dua titik tetap yang berbeda dari T, yaitu $Ta = a$ dan $Tb = b$. Sehingga dengan menggunakan persamaan (3.1) diperoleh

$$d(Ta,Tb) = d(a,b) \leq \frac{\big(d(a,Ta)\cdot d(b,Tb)\big)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\big(d(a,Ta),d(b,Tb)\big)} = \frac{\big(d(a,a)\cdot d(b,b)\big)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\big(d(a,a),d(b,b)\big)}.$$

Karena $d(x,y) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$, kemudian pula $\varphi(x,y) = 1$ jika dan hanya jika $x = y = 1$ sehingga diperoleh

$$d(a,b) \leq \frac{\big(d(a,a)\cdot d(b,b)\big)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\big(d(a,a),d(b,b)\big)} = \frac{(1\cdot 1)^{\frac{1}{2}}}{\varphi(1,1)} = 1.$$

Karena nilai $d(a,b) \geq 1$ untuk setiap $a, b \in M$ sehingga diperoleh

$$d(a,b) = 1.$$

Dengan demikian jelas bahwa $a = b$. Oleh karena itu T memiliki titik tetap tunggal di M.■

Teorema-teorema berikut tidak melibatkan kekontinuan fungsi multiplikatif.

Theorema 3.2[4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif (M,d) dan fungsi $T: M \to M$ adalah kontraksi multiplikatif. Jika (M,d) lengkap, maka T memiliki titik tetap tunggal.*

Theorem 3.3[4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif lengkap (M,d) dan $\eta \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$. Jika fungsi $T: M \to M$ memenuhi kondisi berikut ini:*

$$d(Tx,Ty) \leq \big(d(x,Tx).\big(d(y,Ty)\big)^{\eta}$$

$\forall\, x, y \in M$ dengan $x \neq y$ maka T memiliki titik tetap tunggal.

Theorem 3.4[4]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif lengkap (M,d) dan $\lambda \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$. Jika fungsi $T: M \to M$ memenuhi kondisi berikut ini:*

$$d(Tx,Ty) \leq \big(d(x,Ty).\big(d(y,Tx)\big)^{\lambda}$$

$\forall\, x, y \in M$ dengan $x \neq y$ maka T memiliki titik tetap tunggal.

Teorema berikut Menarik untuk di bahas pembuktiannya karena serupa dengan Teorema 3.2 sampaiTeorema 3.4 di atas, akan tetapi kondisi dari ketiga teorema tersebut di gabung menjadi satu.

Teorema 3.5[7]. *Diberikan ruang metrik multiplikatif lengkap* (M,d) *dan* $\tau,\eta,\lambda \in \mathbb{R}$ *dengan* $\tau \in [0,1)$ *dan* $\eta,\lambda \in [0,\frac{1}{2})$. *Jika fungsi* $T: M \to M$ *memenuhi salah satu kondisi berikut ini:*

(1) $d(Tx,Ty) \leq (d(x,y))^{\tau}$
(2) $d(Tx,Ty) \leq (d(x,Tx).(d(y,Ty))^{\eta}$
(3) $d(Tx,Ty) \leq (d(x,Ty).(d(y,Tx))^{\lambda}$

$\forall\, x,y \in M$ *dengan* $x \neq y$ *maka* T *memiliki titik tetap tunggal.*

Bukti:
Misalkan $\ell = \max\left\{\tau, \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{\lambda}{1-\lambda}\right\}$. Jelas $\ell < 1$. Ambil sebarang $x_0 \in M$ dan $n \geq 0$. Ambil $x = \{T^n x_0\}$ dan $y = \{T^{n+1}x_0\}$. Diketahui $x \neq y$ dengan x adalah titik tetap T. Untuk kondisi (1), harus memenuhi $d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) \leq (d(T^n x_0, T^{n+1}x_0))^{\ell}$. Untuk kondisi (2), harus memenuhi:

$$d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0) \leq (d(T^n x_0,T^{n+1}x_0).d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0))^{\eta}$$
$$\leq (d(T^n x_0,T^{n+1}x_0))^{\eta}.\left(d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)\right)^{\eta}$$
$$\leq \{d(T^n x_0,T^{n+1}x_0))^{\eta}.(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta}.$$
$$d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\eta}\}^{\eta} \leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta^2}.d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\eta^2}$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta^2}.(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta}.d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\eta})^{\eta^2}$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta^2}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta^3}.d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\eta^3}$$
$$\vdots$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\eta+\eta^2+\eta^3+\cdots}$$
$$\leq (d(T^n x_0,T^{n+1}x_0))^{\frac{\eta}{1-\eta}}$$

Sehingga diperoleh:

$$d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0) \leq \left(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)\right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} \leq \left(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)\right)^{\ell}.$$

Untuk kondisi (3), harus memenuhi :

$$d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0) \leq (d(T^n x_0,T^{n+2}x_0).d(T^{n+1}x_0,T^{n+1}x_0))^{\lambda}$$
$$= \left(d(T^n x_0,T^{n+2}x_0)\right)^{\lambda}.1$$
$$\leq (d(T^n x_0,T^{n+1}x_0).d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0))^{\lambda}$$
$$\leq (d(T^n x_0,T^{n+1}x_0))^{\lambda}.(d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0))^{\lambda}$$
$$\leq \left\{d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)\right)^{\lambda}.(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda}.$$

$$d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\lambda}\big\}^{\lambda} \leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda^2}.d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\lambda^2}$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda^2}.(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda}.d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\lambda})^{\lambda^2}$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda^2}.d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda^3}.d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0)^{\lambda^3}$$
$$\vdots$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)^{\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots}$$
$$\leq d(T^n x_0,T^{n+1}x_0))^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

Sehingga diperoleh:

$$d(T^{n+1}x_0,T^{n+2}x_0) \leq (d(T^n x_0,T^{n+1}x_0))^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \leq \left(d(T^n x_0,T^{n+1}x_0)\right)^{\ell}.$$

Maka untuk setiap n diperoleh:

$$
\begin{aligned}
d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) &\le \left(d(T^n x_0, T^{n+1}x_0)\right)^{\ell} \\
&\le \left(d(T^{n-1}x_0, T^n x_0)\right)^{\ell^2} \dots \le \left(d(x_0, Tx_0)\right)^{\ell^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Diberikan $m, n \in N$ dengan $m > n$. Berdasarkan ketaksamaan segitiga multiplikatif diperoleh:

$$
\begin{aligned}
d(T^n x_0, T^m x_0) &\le d(T^n x_0, T^{n+1}x_0).d(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0) \dots d(T^{m-1}x_0, T^m x_0) \\
&\le d(x_0, Tx_0)^{\ell^n}.d(x_0, Tx_0)^{\ell^{n+1}}. \dots .d(x_0, Tx_0)^{\ell^{m-1}} \\
&\le \left(d(x_0, Tx_0)\right)^{\ell^n + \ell^{n+1} + \ell^{n+2} \dots + \ell^{m-1}} \\
&\le d(x_0, Tx_0)^{\ell^n (1+\ell+\ell^2+\cdots)} \\
&= (d(x_0, Tx_0))^{\frac{\ell^n}{1-\ell}}
\end{aligned}
$$

Karena $(n \to \infty)$, apabila $\ell < 1$ maka $\ell^n \to 0$. Hal ini berakibat:

$$\lim_{m,n \to \infty} d(T^n x_0, T^m x_0) = 1.$$

Oleh sebab itu, $\{T^n x_0\}$ adalah barisan Cauchy multiplikatif. Karena (M, d) lengkap, maka terdapat $z \in M$ sedemikian hingga $\{T^n x_0\}$ konvergen ke $z \in M$. SElanjutnya akan dibuktikan bahwa $T(z) = z$. Andaikan $T(z) \ne z$, maka $d(Tz, z) = \varepsilon > 1$. Berdasarkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$d(z, Tz) \le d(z, x).d(x, Tz). \tag{3.21}$$

Ingat definisi bola

$$B = \{x \in M : d(x, z)\} < \varepsilon^{\frac{1}{4}}\}.$$

Dari (3.21) $d(x, Tz) > \varepsilon^{\frac{3}{4}}$ untuk setiap $x \in B$. Karena $\{T^n x_0\}$ konvergen ke z maka setiap bola dengan pusat z memuat semua bilangan berhingga kecuali $\{T^n x_0\}$. Oleh karena itu pasti ada bilangan $p \in N$ sedemikian hingga $\{T^n x_0\} \in B$ $\forall n \ge p$. Berdasarkan hipotesis pada teorema diatas, dua titik $\{T^n x_0\}$ dan z paling tidak pasti memenuhi salah satu dari tiga kondisi di bawah ini:

$(1')$ $d(T^{p+1}x_0, Tz) \le (d(T^p x_0, z))^{\tau}$

$(2')$ $d(T^{p+1}x_0, Tz) \le (d(T^p x_0, T^{p+1}x_0).\left(d(z, Tz)\right)^{\eta}$

$(3')$ $d(T^{p+1}x_0, Tz) \le (d(T^p x_0, Tz).(d(T^{p+1}x_0, z))^{\lambda}$

Kondisi $(1')$ tidak mungkin karena

$$(d(T^p x_0, z))^{\tau} < d(T^p x_0, z) < \varepsilon^{\frac{1}{4}} < \varepsilon^{\frac{3}{4}} < d(T^{p+1}x_0, Tz)$$
$$\therefore T^{p+1}x_0 \in B.$$

Dan kondisi $(2')$ juga tidak mungkin karena

$$
\begin{aligned}
(d(T^p x_0, T^{p+1}x_0).\left(d(z, Tz)\right)^{\eta} &< (d(T^p x_0, T^{p+1}x_0).\left(d(z, Tz)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (d(T^p x_0, z).d(z, T^{p+1}x_0).d(z, Tz))^{\frac{1}{2}} \\
&< \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}.\varepsilon^{\frac{1}{4}}.\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&< d(T^{p+1}x_0, Tz).
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama, kondisi $(3')$ juga tidak mungkin karena:

$$
\begin{aligned}
(d(T^p x_0, Tz).\left(d(T^{p+1}x_0, z)\right)^{\lambda} &< (d(T^p x_0, Tz).d(T^{p+1}x_0, z)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (d(T^p x_0, z).d(z, Tz).d(T^{p+1}x_0, z))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$< \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}.\varepsilon.\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{3}{4}} < d(T^{p+1}x_0, Tz)$$

Karena dari tiga kondisi diatas tidak terpenuhi, maka pengandaian salah. Sehingga benar bahwa $Tz = z$. Selanjutnya, akan dibuktikan ketunggalannya. Andaikan $\exists z' \in M$ dengan $z' \neq z$ sedemikian hingga $T(z') = z'$. Karena d adalah metrik multiplikatif, maka $d(z, z') > 1$. Untuk $z, z' \in M$ diperoleh

$d(Tz, Tz') > d(z, z')^{\tau}$ untuk setiap $\tau \in [0,1)$,

$d(Tz, Tz') > (d(z, Tz).d(z', Tz'))^{\eta}$ untuk setiap $\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$

dan

$d(Tz, Tz') = d(Tz, Tz')^{\frac{1}{2}}.d(Tz, Tz')^{\frac{1}{2}} = (d(Tz, z').d(z, Tz'))^{\frac{1}{2}} >$
$(d(Tz, z').d(z, Tz'))^{\lambda}$ untuk setiap $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$.

Dengan demikian, tidak ada dari tiga kondisi diatas terpenuhi. Maka dari itu, titik tetap di T adalah tunggal. ■

Contoh 3.6 Diberikan $M = [1,2]$, kemudian didefinisikan $d: M \times M \to M$ dengan

$$d(x, y) = 2^{4|x-y|}.$$

Maka (M, d) adalah ruang metrik multiplikatif lengkap. Diberikan pemetaan $T: M \to M$ dengan $T(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ dan didefinisikan fungsi φ dengan

$$\varphi(x, y) = (x \cdot y)^{\frac{1}{4}}$$

Maka T memenuhi kondisi pada Teorema 3.1 sehingga jika memenuhi kondisi teorema tersebut maka berlaku

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\left(\left(d(x, Tx) \cdot d(y, Ty)\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi\left(d(x, Tx), d(y, Ty)\right)}$$

Untuk setiap $x, y \in M$. Jadi T memiliki titik tetap tunggal di M.

IV. KESIMPULAN

Pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dapat dibuktikan tanpa mensyaratkan pemetaannya kontraksi. Apabila pemetaan tersebut memenuhi suatu kondisi dengan bantuan suatu fungsi kontinu multiplikatif maka terbukti mempunyai titik tetap tunggal. Sedangkan, Pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap tanpa bantuan fungsi kontinu multiplikatif dibagi menjadi dua, pertama, dibuktikan 3 (tiga) teorema ketunggalan titik tetap dengan kondisi yang berbeda-beda. Pembuktian dengan mensyaratkan pemetaannya kontraksi multiplikatif, maka terbukti pemetaan tersebut memiliki titik tetap tunggal. Kedua, dibuktikan suatu teorema yang menyatakan bahwa apabila suatu pemetaan memenuhi kondisi

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada LPPM UIN Sunan Kalijaga yang telah membantu membiayai penelitian ini serta beberapa rekan diantaranya Yogi dan Fitri yang telah berkontribusi baik secara langsung maupun tidak langsung dalam terselesainya penelitian ini.

REFERENSI

[1]. A.E. Bashirov, E.M.Kurpnar and A. Ozyapc. *Multiplicative calculus and its Applications,* J.Math. Analysis.App., 337 (2008) hal 36-48.

[2]. Bartle, R.G and Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Fourt Edition. New York: John Wiley & Sons. Inc.

[3]. M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc.(37), 74–79 (1962).

[4]. M. Ozavsar` and A.C. Cevikel, *Fixed Point of Multiplicative contraction mapping on multiplicative metric space*. J. Arxiv: 1205.5131v1 [math.GM] 23 May 2012.

[5]. R. P. Agarwal, M. A. El-Gebily, and D. ORegan, *Generalized contractions in partially ordered metric spaces*, Appl. Anal. 87,109–116 (2008)

[6].Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces*. London: Springer-Verlag.

[7]. Sarwar, M. and Badshah-e-Rome, *Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space*, J. Arxiv:1410.3384v2 [math.GM] 29 Desember 2014.

[8]. Z. Mustafa, Z, B. Sims, *A new approach to a generalized metric spaces*. J. Nonlinear Convex Anal. 7(2) (2006), 289297. MR2254125 (2007f:54049)