JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 1 (June 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

SIFAT-SIFAT RING FAKTOR YANG DILENGKAPI DERIVASI

Iwan Ernanto

Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara BLS 21 Yogyakarta, Indonesia, 55281
Email : iwan.ernanto@ugm.ac.id

Abstract. Let R is a ring with unit element and δ is a derivation on R. An ideal I of R is called δ-ideal if it satisfies $\delta(I) \subseteq I$. Related to the theory of ideal, we can define prime δ-ideal and maximal δ-ideal. The ring R is called δ-simple if R is non-zero and the only δ-ideal of R are $\{0\}$ and R. In this paper, given the necessary and sufficient conditions for quotient ring R/I is a δ_*-simple where δ_* is a derivation on R/I such that $\delta_* \circ \pi = \pi \circ \delta$.
Keywords: Derivation, prime ideal, maximal ideal.

Abstrak. Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Suatu ideal I di R disebut ideal-δ jika memenuhi $\delta(I) \subseteq I$. Seperti halnya pada teori ideal, pada ideal-δ juga dapat didefinisikan ideal-δ prima dan ideal-δ maksimal. Ring R disebut ring δ-sederhana jika R ring tak nol dan ideal-δ di R hanyalah $\{0\}$ dan dirinya sendiri. Pada paper ini, diberikan syarat perlu dan cukup ring faktor R/I merupakan ring δ_*-sederhana dengan δ_* adalah derivasi pada R/I yang memenuhi $\delta_* \circ \pi = \pi \circ \delta$.
Kata kunci: Derivasi, ideal prima, ideal maksimal

I. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Salah satu yang dipelajari dalam struktur aljabar adalah teori ring. Materi mengenai teori ring hampir ada pada setiap buku yang membahas mengenai struktur aljabar, salah satunya dikemukakan oleh Malik et al [6]. Ring merupakan suatu himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Lebih lanjut, sebagai struktur aljabar, ring memiliki himpunan-himpunan bagian yang khusus, yang salah satu diantaranya adalah ideal. Ideal merupakan himpunan bagian yang merupakan subgrup terhadap operasi penjumlahan dan hasil kali sebarang anggota di himpunan tersebut dengan sebarang anggota di ring hasilnya masih menjadi anggota dari himpunan bagian tersebut. Beberapa jenis ideal yang dipelajari adalah ideal prima dan ideal maksimal. Pada tahun 2008, Hashemi [4] melakukan penelitian mengenai ideal prima dan ideal prima kuat pada ring polynomial skew Laurent.

Di lain pihak, salah salah satu ring yang sering dipelajari adalah ring polinomial. Pada ring polinomial $R[x]$, selalu diasumsikan bahwa $xr = rx$ untuk setiap $r \in R$ [6]. Pada perkembangannya, ring polinomial ini diperumum oleh Gooderal dan Warfield [3] menjadi *Differential Ring* $R[x, \delta]$ dengan $xr = rx + \delta(r)$ untuk setiap $r \in R$ dengan δ merupakan pemetaan dari R ke R. Karena berlaku untuk sebarang $r \in R$, diperoleh $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ dan $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ untuk setiap $a, b \in R$. Pemetaan δ yang memenuhi kondisi tersebut disebut derivasi. Kajian mengenai derivasi salah satunya dilakukan oleh Creedon [2], yang menyelidiki sifat-sifat derivasi berkaitan dengan ideal prima.

Berdasarkan definisi derivasi δ yang dikemukakan sebelumnya, peta dari suatu ideal I di ring R mempunyai dua kemungkinan, yaitu $\delta(I) \subseteq I$ atau $\delta(I) \nsubseteq I$. Ideal I di ring R yang memenuhi $\delta(I) \subseteq I$ disebut ideal-δ [3]. Selanjutnya, Helmi et al [5] mendefinisikan dua jenis ideal-δ, yaitu ideal-δ prima dan ideal-δ maksimal. Lebih lanjut, Bronstein [1] menyatakan bahwa jika I merupakan ideal-δ maka terdapat derivasi δ_* pada R/I yang memenuhi $\delta_* \circ \pi = \pi \circ \delta$.

Berdasarkan eksistensi derivasi δ_* pada ring faktor R/I [1] dan pendefinisian ideal-δ prima dan ideal-δ maksimal [5], pada penelitian ini diberikan syarat perlu dan cukup agar ring R/I merupakan ring δ_*-sederhana.

II. DERIVASI $\boldsymbol{\delta}$ DAN IDEAL-$\boldsymbol{\delta}$

Pembahasan tentang derivasi $\boldsymbol{\delta}$ dan ideal- $\boldsymbol{\delta}$ dimulai dengan mendefinisikan derivasi.

Definisi 2.1 [1,3,5] *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan dan pemetaan $\delta: R \to R$. Pemetaan δ disebut derivasi jika memenuhi $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ dan $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ untuk setiap $a, b \in R$.*

Berdasarkan Definisi 2.1 di atas, jelas bahwa pemetaan nol merupakan derivasi, yang selanjutnya disebut dengan derivasi nol. Untuk memperjelas pemahaman mengenai derivasi, berikut diberikan beberapa contoh derivasi pada suatu ring.

Contoh 2.2 Diberikan ring

$$M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan pemetaan $\delta: M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ dengan $\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ berlaku

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(b+y) \\ c+z & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ c & 0 \end{bmatrix} \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(ay+bw) \\ cx+dz & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -bz & -bw \\ cx & cy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bz & -ay \\ dz & -cy \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -y \\ z & 0 \end{bmatrix} \\
&= \delta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\delta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran tersebut, pemetaan δ merupakan derivasi pada $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Contoh 2.3 Diberikan ring polinomial $\mathbb{Z}[x]$ dan pemetaan $\delta: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\delta\big(p(x)\big) = \delta(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$ untuk setiap $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Berdasarkan sifat turunan pada kalkulus, dapat dibuktikan bahwa pemetaan δ di atas merupakan derivasi pada $\mathbb{Z}[x]$.

Lemma 2.4 [3] *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan. Untuk setiap $a \in R$ dapat didefinisikan derivasi $\delta_a: R \longrightarrow R$ dengan definisi $\delta_a(r) = ar - ra$ untuk setiap $r \in R$. Selanjutnya, derivasi δ_a disebut inner derivasi pada R.*

Pada kasus ring R merupakan ring komutatif, diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 2.5 *Jika R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan maka satu-satunya inner derivasi adalah derivasi nol.*

Selanjutnya, diperhatikan derivasi $\delta: M_{2\times2}(\mathbb{Z}) \to M_{2\times2}(\mathbb{Z})$ pada Contoh 2.2. Karena terdapat matrik $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{Z})$ sehingga berlaku $\delta_A(B) = AB - BA = \delta(B)$ untuk setiap matrik $B \in M_{2\times2}(\mathbb{Z})$. Jadi derivasi $\delta = \delta_A$ merupakan *inner* derivasi pada $M_{2\times2}(\mathbb{Z})$. Sebaliknya, jika diperhatikan derivasi $\delta: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ pada Contoh 2.3, karena ring polynomial $\mathbb{Z}[x]$ merupakan ring komutatif maka berdasarkan Akibat 2.5 diperoleh bahwa pemetaan δ bukan merupakan *inner* derivasi pada ring $\mathbb{Z}[x]$.

Salah satu fakta yang muncul pada ring R dengan elemen satuan, jika derivasi $\delta = \delta_a$ merupakan *inner* derivasi dan I merupakan ideal di R maka berlaku $\delta(I) = \delta_a(I) \subseteq I$. Namun, jika δ bukan merupakan inner derivasi maka belum tentu berlaku $\delta(I) \subseteq I$. Contoh berikut akan memperlihatkan bahwa $\delta(I) \nsubseteq I$.

Contoh 2.6 Diberikan ring polynomial $\mathbb{Z}[x]$ dan pemetaan $\delta: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\delta\big(p(x)\big) = p'(x)$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ seperti pada Contoh 2.3. Selanjutnya diambil ideal $I = \langle x \rangle = \{xp(x) | p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$. Diperhatikan bahwa $x^2 + x = x(x+1) \in I$ dan berlaku $\delta(x^2 + x) = 2x + 1 \notin I$, jadi diperoleh $\delta(I) \nsubseteq I$.

Berdasarkan hasil pada Contoh 2.6, menginspirasi untuk mendefinisikan ideal I di R yang memenuhi kondisi $\delta(I) \subseteq I$ seperti yang dikemukakan oleh Goodearl dan Warfield [3] dan Helmi et al [5].

Definisi 2.7 [3,5] *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan, ideal I di R dan derivasi δ pada R. Ideal I disebut ideal-δ jika memenuhi $\delta(I) \subseteq I$.*

Contoh 2.8 Diberikan ring polynomial $\mathbb{Z}[x]$ dan derivasi $\delta: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\delta\big(p(x)\big) = p'(x)$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ seperti pada Contoh 2.3. Selanjutnya diambil ideal $J = \langle x^2, 2 \rangle$. Misalkan $p(x)$ sebarang polinom di J. Berdasarkan algoritma pembagian, $p(x) = x^2q(x) + 2a_1x + a_0$ untuk suatu $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dan $a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Diperhatikan bahwa $\delta\big(p(x)\big) = \delta(x^2q(x) + 2a_1x + a_0) = \delta\big(x^2q(x)\big) + \delta(2a_1x + a_0) = 2xq(x) + x^2q'(x) + 2a_1 \in J$. Dengan demikian diperoleh $\delta(J) \subseteq J$. Jadi $J = \langle x^2, 2 \rangle$ merupakan ideal-δ di $\mathbb{Z}[x]$.

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA), Vol. 1, No. 1 (June 2018)
Available online at www.jfma.matematika.undip.ac.id

Seperti halnya pada ideal yang sudah dipelajari, berikut diberikan sifat-sifat ideal-δ berkaitan dengan irisan, jumlahan, dan perkalian dari dua ideal-δ.

Lemma 2.9 *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Jika A dan B merupakan dua ideal-δ di R maka berlaku $A \cap B$, $A + B$, dan AB merupakan ideal-δ di R.*

Bukti. Diketahui A dan B merupakan dua ideal- δ di R, artinya $\delta(A) \subseteq A$ dan $\delta(B) \subseteq B$. Karena A dan B dua ideal-δ di R, diperoleh bahwa A dan B masing-masing merupakan ideal di R sehingga $A \cap B$, $A + B$, dan AB merupakan ideal di R.

i) Dibuktikan $\delta(A \cap B) \subseteq A \cap B$.
Diambil sebarang $x \in A \cap B$, artinya $x \in A$ dan $x \in B$. Karena A dan B merupakan dua ideal-δ di R, diperoleh $\delta(x) \in A$ dan $\delta(x) \in B$. Dengan demikian $\delta(x) \in A \cap B$. Jadi $A \cap B$ merupakan ideal-δ di R.

ii) Dibuktikan $\delta(A + B) \subseteq A + B$.
Diambil sebarang $x \in A + B$, artinya $x = a + b$ untuk suatu $a \in A$ dan $b \in B$. Karena δ merupakan derivasi dan A dan B merupakan dua ideal-δ di R diperoleh
$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(a + b)\\ &= \delta(a) + \delta(b) \in A + B.\end{aligned}$$
Jadi $A + B$ merupakan δ-ideal di R

iii) Dibuktikan $\delta(AB) \subseteq AB$.
Diambil sebarang $x \in AB$, artinya $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ untuk suatu $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1,2, \dots, n$. Karena A dan B merupakan dua ideal-δ di R diperoleh $\delta(a_i) \in A$ dan $\delta(b_i) \in B$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Dengan demikian diperoleh
$$\begin{aligned}\delta(x) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i b_i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\big(\delta(a_i) b_i + a_i \delta(b_i)\big) \in AB.\end{aligned}$$
Jadi AB merupakan ideal-δ di R.

Terbukti bahwa $A \cap B$, $A + B$, dan AB merupakan ideal-δ di R. ∎

Seperti halnya pada teori ideal yang sudah dikenal, dalam konsep ideal-δ juga dapat didefinisikan ideal-δ kiri dari suatu ring. Ideal kiri I di ring R disebut ideal-δ kiri jika memenuhi $\delta(I) \subseteq I$. Secara analog, dapat didefinisikan ideal-δ kanan dari suatu ring. Lemma berikut merupakan hubungan antara ideal-δ kiri dan ideal-δ pada ring R.

Lemma 2.10 *Jika A merupakan ideal-δ kiri maka AR merupakan ideal-δ di ring R.*

Bukti. Diketahui A merupakan ideal-δ kiri di R. Jelas bahwa AR merupakan ideal di R. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in AR$, artinya $x = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$ untuk suatu $a_i \in A$, $r_i \in R$, $i = 1,2, \dots, n$. Karena A merupakan ideal-δ kiri di R diperoleh $\delta(a_i) \in A$, $i = 1,2, \dots, n$. Dengan demikian diperoleh
$$\delta(x) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i r_i) = \sum_{i=1}^{n}\big(\delta(a_i) r_i + a_i \delta(r_i)\big) \in AR.$$
Jadi AR merupakan ideal-δ di R. Secara analog dapat dibuktikan bahwa RA merupakan ideal-δ.

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan jika A merupakan ideal-δ kanan maka diperoleh AR merupakan ideal-δ di ring R. ■

Pada teori ideal, telah dikenalkan konsep ideal prima dan ideal maksimal. Pendefinisian mengenai ideal prima dan ideal maksimal memotivasi untuk mendefinisikan ideal-δ prima dan ideal-δ maksimal di ring R. Berikut diberikan definisi ideal-δ prima dan ideal-δ maksimal di ring R yang dikemukakan oleh Helmi et al [5].

Definisi 2.11 [5] *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Suatu δ-ideal P disebut ideal-δ prima jika untuk setiap dua ideal-δ A dan B di R dengan $AB \subseteq P$ berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.*

Definisi 2.12 [5] *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Suatu ideal-δ M disebut ideal-δ maksimal jika $M \neq R$ dan tidak ada ideal-δ I di R sehingga $M \subset I \subset R$.*

Berikut ini diberikan contoh ideal-δ yang merupakan ideal-δ prima dan ideal-δ maksimal.

Contoh 2.13 Diberikan ring polynomial $\mathbb{Z}[x]$dan derivasi $\delta: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\delta\big(p(x)\big) = p'(x)$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ seperti pada Contoh 2.3. Diperhatikan bahwa ideal $P = \langle 2 \rangle = \{2p(x) \mid p(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ merupakan ideal-δ di $\mathbb{Z}[x]$. Lebih lanjut ideal P merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$. Selanjutnya diambil sebarang dua ideal-δ A dan B di $\mathbb{Z}[x]$ dengan $AB \subseteq P$. Karena A dan B merupakan ideal di $\mathbb{Z}[x]$ dan P merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$ maka diperoleh $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$. Jadi diperoleh bahwa $P = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal-δ prima.

Contoh 2.14 Diberikan ring polynomial $\mathbb{Z}[x]$dan pemetaan $\delta: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\delta\big(p(x)\big) = p'(x)$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ seperti pada Contoh 2.3. Berdasarkan Contoh 2.8, telah diketahui bahwa $J = \langle x^2, 2 \rangle$ merupakan ideal-δ di $\mathbb{Z}[x]$. Andaikan terdapat ideal-δ I di $\mathbb{Z}[x]$ yang memenuhi $J \subset I \subset R$. Karena $I \neq J$ maka terdapat $p(x) \in I$ tetapi $p(x) \notin J$. Misalkan $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ untuk suatu $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0,1,..,n$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\delta\big(p(x)\big) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}\\ &= a_1 + 2a_2x + x^2(3a_3 + \cdots + na_nx^{n-3}) \in I.\end{aligned}$$

Karena $p(x) \notin J$ maka $a_0 \notin J$ atau $a_1 \notin J$. Jika $a_1 \notin J$ maka $a_1 = 2a + 1$ untuk suatu bilangan bulat a. Karena $2a_2x + x^2(3a_3 + \cdots + na_nx^{n-3}) \in J \subset I$ dan $\delta\big(p(x)\big) \in I$ diperoleh $a_1 \in I$. Karena $a_1 \in I$ dan $2 \in J \subset I$ diperoleh $1 = a_1 - 2a \in I$, yang berakibat $I = R$, suatu kontradiksi. Jadi haruslah $a_1 \in J$. Karena $a_1 \in J$ maka diperoleh $a_0 \notin J$ atau dengan kata lain $a_0 = 2b + 1$ untuk suatu bilangan bulat b. Karena $a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in J \subset I$ diperoleh $a_0 \in I$. Karena $a_0 \in I$ dan $2 \in J \subset I$ diperoleh $1 = a_0 - 2b \in I$, yang berakibat $I = R$, suatu kontradiksi. Jadi yang benar adalah tidak terdapat ideal-δ I di $\mathbb{Z}[x]$ yang memenuhi $J \subset I \subset R$. Jadi diperoleh bahwa $J = \langle x^2, 2 \rangle$ merupakan ideal-δ maksimal di $\mathbb{Z}[x]$.

Berikut ini diberikan syarat perlu dan cukup ideal-δ dari suatu ring merupakan ideal-δ prima.

Teorema 2.15 *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R serta ideal-δ P di R. Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen*

i) Ideal-δ P merupakan ideal-δ prima

ii) *Untuk setiap ideal-δ kiri A, B di R dengan $AB \subseteq P$ berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.*
iii) *Untuk setiap ideal-δ kanan A, B di R dengan $AB \subseteq P$ berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.*

Bukti. $(ii \Rightarrow i)$ Jelas memenuhi. $(i \Rightarrow ii)$ Diketahui P merupakan ideal-δ prima di R. Diambil sebarang ideal-δ kiri A, B di R dengan $AB \subseteq P$. Berdasarkan Lemma 2.10 diperoleh bahwa AR dan BR merupakan ideal-δ di R. Diperhatikan bahwa $(AR)(BR) = A(RB)R \subseteq ABR \subseteq PR \subseteq P$. Karena P merupakan merupakan ideal-δ prima di R diperoleh $AR \subseteq P$ atau $BR \subseteq P$. Karena $A \subseteq AR$ dan $B \subseteq BR$ maka diperoleh $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $(i \Leftrightarrow iii)$. ■

Pada teori ideal, telah diketahui bahwa setiap ideal maksimal pasti merupakan ideal prima. Merujuk fakta tersebut, berikut ini merupakan hubungan antara ideal-δ maksimal dan ideal-δ prima.

Teorema 2.16 *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Jika M merupakan ideal-δ maksimal maka M merupakan ideal-δ prima.*

Bukti. Diketahui M merupakan ideal-δ maksimal di R. Diambil sebarang dua ideal-δ A dan B dengan $AB \subseteq M$. Misalkan $A \nsubseteq M$, sehingga cukup dibuktikan $B \subseteq M$. Karena A dan M merupakan dua ideal-δ dan $A \nsubseteq M$, berdasarkan Lemma 2.9 diperoleh $A + M$ merupakan ideal-δ, lebih lanjut $A + M \neq M$. Karena M merupakan ideal-δ maksimal diperoleh bahwa $A + M = R$. Selanjutnya diperhatikan bahwa

$$B = RB = (A + M)B = AB + MB \subseteq M + M = M.$$

Dengan demikian terbukti bahwa M merupakan ideal-δ prima. ■

Konvers dari Teorema 2.16 belum tentu berlaku. Sebagai *counter example*-nya, ideal $P = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal-δ prima di $\mathbb{Z}[x]$ tetapi bukan merupakan ideal-δ maksimal di $\mathbb{Z}[x]$ karena terdapat ideal-δ $M = \langle 2, x^2 \rangle$ yang memenuhi $P \subset M \subset \mathbb{Z}[x]$. Pada teori ideal, telah diketahui bahwa setiap ideal sejati pada suatu ring pasti termuat di dalam suatu ideal maksimal. Berdasarkan fakta tersebut, selanjutnya ditunjukkan eksistensi ideal-δ maksimal dari suatu ring yang dilengkapi dengan derivasi δ.

Teorema 2.17. *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Setiap ideal-δ sejati dari R selalu termuat di suatu ideal-δ maksimal dari R.*

Bukti. Diambil sebarang ideal-δ I di R. Dibentuk

$$\mathcal{M} = \{J \mid I \subseteq J, J \text{ ideal} - \delta \text{ sejati di } R\}.$$

Jelas bahwa $\mathcal{M} \neq \emptyset$, sebab $\mathcal{M}$ memuat I. Mudah dipahami bahwa $\mathcal{M}$ merupakan himpunan terurut parsial, yakni dengan relasi urutannya adalah $\subseteq$. Akan ditunjukkan bahwa setiap rantai di $\mathcal{M}$ mempunyai batas atas di $\mathcal{M}$. Misalkan $\mathcal{C} = \{J_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ sebarang rantai di $\mathcal{M}$, dengan Δ adalah suatu himpunan indeks. Karena $I \subseteq J_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in \Delta$, diperoleh $I \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$. Diambil sebarang $r \in R$ dan $a, b \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$, berarti $a \in J_{\alpha_1}$ dan $b \in J_2$, untuk suatu $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$. Karena $\mathcal{C}$ merupakan rantai, diperoleh $J_{\alpha_1} \subseteq J_{\alpha_2}$ atau $J_{\alpha_2} \subseteq J_{\alpha_1}$. Misalkan $J_{\alpha_1} \subseteq J_{\alpha_2}$, berakibat $a, b \in J_{\alpha_2}$. Karena J_{α_2} merupakan ideal-δ di R diperoleh $a - b, ra, ar \in J_{\alpha_2} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$. Lebih lanjut diperoleh $\delta(a) \in \delta(J_{\alpha_2}) \subseteq \delta(\bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$. Jadi $\bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$ merupakan ideal-δ di R. Jelas bahwa $\bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha \neq R$, sebab jika $1 \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$ maka $1 \in J_\alpha$ untuk suatu $\alpha \in \Delta$, dan berakibat $J_\alpha = R$ (kontradiksi dengan $J_\alpha \neq R$). Dengan demikian $\bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$ merupakan ideal-δ sejati di R dan memuat I. Mudah dipahami bahwa $\bigcup_{\alpha \in \Delta} J_\alpha$ merupakan batas atas dari $\mathcal{M}$. Berdasarkan Lemma Zorn, berakibat $\mathcal{M}$ mempunyai elemen maksimal, katakana M. Selanjutnya ditunjukkan M merupakan ideal-δ maksimal di R. Andaikan terdapat ideal-δ K di R sedemikian sehingga $M \subset K \subset R$, berarti $K \in \mathcal{M}$ dan berakibat M bukan merupakan batas dari $\mathcal{M}$ (kontradiksi). Jadi, M merupakan ideal-δ maksimal di R. ∎

III. RING FAKTOR YANG DILENGKAPI DENGAN DERIVASI

Pada teori ring, salah satu yang dipelajari adalah mengenai ring faktor. Sebelum membicarakan ring faktor yang berkaitan dengan ideal-δ, berikut diberikan derivasi pada suatu ring faktor.

Lemma 3.1 [1] *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Jika A merupakan ideal-δ di R maka pengaitan $\delta_*: R/A \longrightarrow R/A$ dengan definisi $\delta_*(\bar{r}) = \overline{\delta(r)}$ untuk setiap $\bar{r} \in R/A$, merupakan derivasi. Lebih lanjut, pengaitan δ_* memenuhi $\delta_* \circ \pi = \pi \circ \delta$ dengan merupakan proyeksi dari R ke R/A.*

Bukti. Sebelumnya dibuktikan bahwa pengaitan δ_* merupakan pemetaan. Diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/A$ dengan $\bar{a} = \bar{b}$, yang berarti $a - b \in A$. Diperhatikan bahwa $\bar{0} = \overline{\delta(0)} = \delta_*(\bar{0}) = \delta_*(\overline{a-b}) = \overline{\delta(a-b)} = \overline{\delta(a) - \delta(b)} = \overline{\delta(a)} - \overline{\delta(b)} = \delta_*(\bar{a}) - \delta_*(\bar{b})$, berakibat $\delta_*(\bar{a}) = \delta_*(\bar{b})$. Jadi δ_* merupakan pemetaan. Selanjutnya untuk sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/A$ berlaku

$$\delta_*(\bar{a} + \bar{b}) = \delta_*(\overline{a+b}) = \overline{\delta(a+b)} = \overline{\delta(a) + \delta(b)} = \overline{\delta(a)} + \overline{\delta(b)} = \delta_*(\bar{a}) + \delta_*(\bar{b})$$

dan

$$\delta_*(\bar{a}\bar{b}) = \delta_*(\overline{ab}) = \overline{\delta(ab)} = \overline{\delta(a)b + a\delta(b)} = \overline{\delta(a)b} + \overline{a\delta(b)} = \overline{\delta(a)}\,\bar{b} + \bar{a}\,\overline{\delta(b)} = \delta_*(\bar{a})\bar{b} + \bar{a}\delta_*(\bar{b}).$$

Terbukti bahwa δ_* merupakan derivasi pada R/A. Selanjutnya, dibuktikan

$$\delta_* \circ \pi = \pi \circ \delta.$$

Diambil sebarang $r \in R$, berlaku $(\pi \circ \delta)(r) = \pi(\delta(r)) = \overline{\delta(r)} = \delta_*(\bar{r}) = \delta_*(\pi(r)) = (\delta_* \circ \pi)(r)$. Karena berlaku untuk sebarang $r \in R$ maka diperoleh $\delta_* \circ \pi = \pi \circ \delta$. ∎

Lemma 3.2 *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan derivasi δ dan ideal-δ A di R. Jika B merupakan ideal-δ di R maka $\bar{B} = \{\bar{b} \mid b \in B\}$ merupakan ideal-δ_* di R/A.*

Bukti. Jelas bahwa $\bar{B}$ merupakan ideal di R/A. Selanjutnya, karena B merupakan *ideal-δ* di R maka berlaku $\delta(b) \in B$ untuk setiap $b \in B$. Jadi $\delta_*(\bar{b}) = \overline{\delta(b)} \in \bar{B}$. Terbukti $\bar{B}$ merupakan ideal-δ_* di R/A. ∎

Lemma 3.3 *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan derivasi δ dan ideal-δ A di R. Jika K merupakan ideal-δ_* di R/A maka terdapat ideal-δ L di R yang memenuhi $\bar{L} = K$.*

Bukti. Dibentuk $L = \{r \in R \mid \bar{r} \in K\}$, jelas $L \neq \emptyset$ karena $0 \in L$. Diambil sebarang $a, b \in L$ dan $r \in R$, diperoleh $\bar{a}, \bar{b} \in K$. Karena K merupakan ideal-δ_* di R/A diperoleh $\overline{a-b} = \bar{a} -$

$\bar{b} \in K$, $\overline{ar} = \bar{a}\bar{r} \in K$, $\overline{ra} = \bar{r}\bar{a} \in K$, $\overline{\delta(a)} = \delta_*(\bar{a}) \in K$ sehingga diperoleh $a - b, ar, ra, \delta(a) \in L$. Jadi terbukti L merupakan *ideal-*δ di R. Selanjutnya, berdasarkan pembentukan himpunan L, diperoleh $\bar{L} = K$. ■

Pada teori ideal, diketahui jika R merupakan ring dengan elemen satuan dan M merupakan ideal maksimal di R maka ring faktor R/M merupakan division ring, yang idealnya hanya $\{\bar{0}\}$ dan R/M. Dengan kata lain, R/M merupakan ring sederhana. Adanya ring sederhana memotivasi untuk mendefinisikan ring δ-sederhana seperti yang dikemukakan oleh Gooderl dan Warfield. Berikut ini diberikan definisi mengenai ring δ-sederhana.

Definisi 3.3 [3] *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Ring R dikatakan δ-sederhana jika ideal-δ di R hanya $\{0\}$ dan dirinya sendiri.*

Berikut ini diberikan syarat perlu dan cukup agar ring faktor R/M merupakan ring δ_*-sederhana merujuk pada syarat perlu dan cukup ring faktor R/M merupakan ring sederhana.

Teorema 3.4 *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan derivasi δ dan ideal-δ M di R. Ideal-δ M merupakan ideal- δ maksimal di R jika dan hanya jika R/M merupakan ring δ_*-sederhana.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui M merupakan ideal- δ maksimal di R. Andaikan R/M bukan merupakan ring δ_*-sederhana, jadi terdapat ideal-δ_* K di R/M sehingga $\{0\} \subset K \subset R/M$. Berdasarkan Lemma 3.3 terdapat ideal-δ $L = \{r \in R \mid \bar{r} \in K\}$. Karena $\{0\} \subset K \subset R/M$ diperoleh $M \subset L \subset R$, kontradiksi dengan M merupakan ideal- δ maksimal. Jadi pengandaian salah, yang benar R/M merupakan ring δ_*-sederhana.

$(\Leftarrow)$ Diketahui R/M merupakan ring δ_*-sederhana. Andaikan M bukan merupakan ideal- δ maksimal di R, artinya terdapat ideal- δ L di R dengan $M \subset L \subset R$. Dengan demikian diperoleh $\{0\} \subset \bar{L} \subset R/M$ dengan $\bar{L} = \{\bar{b} \mid b \in L\}$. Berdasarkan Lemma 3.2, $\bar{L}$ merupakan ideal-δ_* di R/M, kontradiksi dengan R/M merupakan ring δ_*-sederhana. Jadi pengandaian salah, yang benar M merupakan ideal- δ maksimal di ring R. ■

Dengan menggunakan Teorema 3.4, berikut diberikan contoh suatu ring yang merupakan ring δ_*-sederhana.

Contoh 3.5 Pada Contoh 2.14, telah diketahui bahwa $J = \langle x^2, 2\rangle$ merupakan ideal- δ maksimal di ring polynomial $\mathbb{Z}[x]$ yang dilengkapin dengan derivasi δ. Selanjutnya diambil ring $R = \mathbb{Z}[x]/J = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{x}, \bar{x} + \bar{1}\}$. Berdasarkan Teorema 3.4, diperoleh bahwa ring $R = \mathbb{Z}[x]/J$ merupakan ring ring δ_*-sederhana.

Dengan memperhatikan Definisi 3.3, jelas bahwa setiap ring sederhana pasti merupakan ring δ_*-sederhana tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Ring $R = \mathbb{Z}[x]/J$ pada Contoh 3.5 merupakan ring δ_*-sederhana tetapi bukan merupakan ring sederhana karena terdapat ideal $K = \langle \bar{x} \rangle = \{\bar{0}, \bar{x}\}$ yang memenuhi $\{\bar{0}\} \subset K \subset R = \mathbb{Z}[x]/J$.

Fakta lain pada teori ring terkait dengan ring faktor yaitu jika R merupakan ring dengan elemen satuan dan P merupakan ideal prima di R maka ring faktor R/P merupakan domain, yang idealnya $\{\bar{0}\}$ merupakan ideal prima di R/P. Dengan kata lain, R/P merukapan ring prima. Adanya ring prima memotivasi untuk mendefinisikan ring δ-prima.

Definisi 3.6 *Diberikan ring R dengan elemen satuan dan derivasi δ pada R. Ring R dikatakan δ-prima jika $\{0\}$ ideal- δ di R.*

Berikut ini diberikan syarat perlu dan cukup agar ring faktor R/P merupakan ring δ_*-prima merujuk pada syarat perlu dan cukup ring faktor R/P merupakan ring prima.

Teorema 3.7 *Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan derivasi δ dan ideal-δ P di R. Ideal-δ P merupakan ideal- δ prima di R jika dan hanya jika R/P merupakan ring δ_*-prima.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui P merupakan ideal- δ prima di R. Diambil sebarang δ_*-ideal K, L di R/P dengan $\subseteq \{\bar{0}\}$. Dimisalkan $K \neq \{\bar{0}\}$ yang berakibat terdapat $r \in R$ yang memenuhi $\bar{r} \in K$ dan $\bar{r} \neq \bar{0}$, yang artinya terdapat $r \in R$ yang memenuhi $\bar{r} \in K$ dan $r \notin P$. Berdasarkan Lemma 3.3 terdapat ideal-δ A, B di R dengan $K = \bar{A}$ dan $L = \bar{B}$. Karena $K \neq \{\bar{0}\}$ maka diperoleh $r \in R$ yang memenuhi $r \in A$ tetapi $r \notin P$, jadi $A \nsubseteq P$. Selanjutnya dibuktikan bahwa $AB \subseteq P$. Diambil sebarang $x \in AB$, artinya $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ untuk suatu $a_i \in A, b_i \in B, i = 1,2, \dots, n$ sehingga diperoleh $\bar{a_i} \in K, \bar{b_i} \in L$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Dengan demikian diperoleh $\bar{x} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a_i}\, \bar{b_i} \in KL \subseteq \{\bar{0}\}$, berakibat $x \in P$. Jadi terbukti $AB \subseteq P$. Karena P merupakan ideal-δ prima dan A merupakan ideal-δ yang memenuhi $A \nsubseteq P$ maka diperoleh $B \subseteq P$ yang berakibat $L \subseteq \{\bar{0}\}$. Terbukti bahwa R/P merupakan ring δ_*-prima.
$(\Leftarrow)$ Diketahui R/P merupakan ring δ_*-prima. Diambil sebarang ideal-δ A, B di R dengan $AB \subseteq P$. Berdasarkan Lemma 3.2 diperoleh $\bar{A}, \bar{B}$ merupakan ideal-δ_* di R/P. Karena $AB \subseteq P$ diperoleh $\bar{A}\bar{B} \subseteq \bar{P} = \{\bar{0}\}$. Karena R/P merupakan ring δ_*-prima diperoleh $\bar{A} \subseteq \{\bar{0}\}$ atau $\bar{B} \subseteq \{\bar{0}\}$, yang berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal-δ prima di R. ∎

Dengan memperhatikan Definisi 3.6, setiap ring prima merupakan ring δ_*-prima tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Sebab jika diambil $R = \mathbb{Z}[x]/J$ pada Contoh 3.5, berdasarkan Teorema 2.16, Teorema 3.7 diperoleh bahwa $R = \mathbb{Z}[x]/J$ merupakan ring δ_*-prima, lebih lanjut ring $R = \mathbb{Z}[x]/J$ bukan merupakan ring prima sebab terdapat ideal K, L di $\mathbb{Z}[x]/J$ dengan $K = L = \langle \bar{x} \rangle = \{\bar{0}, \bar{x}\}$ yang memenuhi $KL = \{\bar{0}\}$ tetapi $K \nsubseteq \{\bar{0}\}$ dan $L \nsubseteq \{\bar{0}\}$.

IV. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa ring faktor R/I merupakan ring δ_*-sederhana jika dan hanya jika I merupakan ideal-δ maksimal di R. Lebih lanjut, ring faktor R/I merupakan ring δ_*-prima jika dan hanya jika I merupakan ideal-δ prima di R. Mengingat pendefinisian ideal-δ, jika derivasi $\delta = \delta_a$ merupakan suatu *inner* derivasi maka hasil-hasil yang diperoleh pada penelitian ini akan ekuivalen dengan hasil yang sudah ada pada teori ideal dan teori ring yang sudah dipelajari.

REFERENSI

[1] Bronstein, M., 2005, *Symbolic Integration I: Transcendental Function*, Springer-Verlag, New York.

[2] Creedon, T., 1998, Derivations and Prime Ideals, *Mathematical Proceedings of The Royal Irish Academy*, 98A(2), 223-225.
[3] Goodearl, K.R.; Warfield, Jr., R.B. 2004. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press: New York.
[4] Hashemi, E., 2008, Prime Ideals and Strongly Prime Ideals of Skew Laurent Rings, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol 2008, 835605.
[5] Helmi, M.R., Marubayashi, H., Ueda, A., 2013, Differential Polynomial Rings Which Are Generalized Asano prime Ring, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 44(5), 673-681.
[6] Malik, D.S.; Moderson, J.M; Sen, M.K. 1998. *Fundamental of Abstract Algebra*. McGraw-Hill Company. New York.