JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

SYARAT PERLU DAN CUKUP ELEMEN NORMAL PADA RING DENGAN ELEMEN SATUAN

Titi Udjiani SRRM

Dept. of Mathematics, Universitas Diponegoro , Semarang, Indonesia
Email : udjianititi@lecturer.undip.ac.id

Abstract. In a ring with involution, it is possible to collect elements that are commutative with elements obtained from the results of the involution operation on itself. Such elements are called normal elements. On other hand, rings with involution have elements that have Moore Penrose inverse. Elements that have Moore Penrose inverse are not always normal. This paper discusses the necessary and sufficient conditions for elements that have Moore Penrose inverse is normal. The method used is determine set of elements that have Moore Penrose inverse. Then take normal elements and determine sufficient conditions. Investigate whether the sufficient condition is a necessary condition. If yes, we obtain the necessary and sufficient condition. If not, determine else sufficient conditions for can be added to obtain the necessary and sufficient conditions.
Keywords: Ring, Normal, Moore, Penrose.

I. PENDAHULUAN

Struktur aljabar ring yang dibahas pada tulisan ini adalah ring dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan involusi. Involusi pada ring menurut [1],[2],[3],[4],[5],[6] merupakan fungsi pada ring yang didefinisikan sebagai berikut. Jika R adalah ring dengan elemen satuan dan $a \in R$. Suatu operasi involusi "$*$" pada ring R adalah fungsi $* : a \in R \mapsto *(a) = a^* \in R$ yang memenuhi

$$(a^*)^* = a \qquad (a+b)^* = a^* + b^* \qquad (ab)^* = b^* a^*$$

untuk setiap element a, b di R. Selanjutnya simbol R untuk ring dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan involusi. Menurut [7],[8],[9],[10],[11] jika $a \in R$ dan memiliki sifat $a^*a = a\,a^*$, maka a dikatakan normal. Himpunan semua elemen normal di R disimbolkan dengan R^{nor}. Para peneliti [12], [13],[14], [15], [16] mendefinisikan invers Moore Penrose elemen a suatu ring R dengan involusi "$*$" adalah elemen $b \in R$ yang memenuhi:

$$aba = a, \qquad bab = b, \qquad (ab)^* = ab, \qquad (ba)^* = ba.$$

Elemen b yang memenuhi persamaan (1) disebut invers Moore Penrose dari a dan disimbolkan dengan a^+. Himpunan elemen di R yang mempunyai invers Moore Penrose disimbolkan dengan R^+. Sifat sifat utama dari $a \in R^+$oleh D. Mosic, dkk [10] diberikan sebagai berikut :

1. $a^* \in R^+$, dengan $(a^*)^+ = (a^+)^*$
2. $a^* = a^*a\,a^+ = a^+aa^*$
3. $a^*a \in R^+$, dengan $(a^*a)^+ = a^+(a^+)^*$
4. $a\,a^* \in R^+$, dengan $(a\,a^*)^+ = (a^+)^*a^+$

Diberikan fenomena pada $M_{2x2}(\mathbb{R})$ yaitu himpunan matriks berukuran 2X2 atas bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan involusi transpose "T".

Diperoleh bahwa matriks $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ mempunyai invers Moore Penrose. Dengan $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$. Akan tetapi yang membedakan dari kedua contoh diatas adalah $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ normal, sementara $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ tidak. $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$. Tulisan ini membahas syarat perlu dan cukup elemen pada ring R adalah elemen normal yang dibatasi hanya pada elemen di R yang mempunyai invers Moore Penrose.

II. PEMBAHASAN

Pada bagian pendahuluan sudah dijelaskan bahwa jika a memiliki invers Moore Penrose, maka a^*a dan $a\,a^*$ juga demikian. Selanjutnya diperoleh bahwa jika a normal, maka a^*a dan $a\,a^*$ normal.

$$a^*a\,(a^*a\,)^* = a^*aa^*(a^*\,)^* = a^*aa^*a = a^*(a^*\,)^*a^*a = (a^*a\,)^*a^*a.$$
$$a\,a^*\,(a\,a^*\,)^* = a\,a^*(a^*\,)^*a^* = (a^*\,)^*\,a^*aa^* = a\,a^*aa^* = (a\,a^*\,)^*a\,a^*.$$

Hasil ini menjelaskan bahwa jika a memiliki invers Moore Penrose dan normal, demikian juga a^*a dan $a\,a^*$.

Selanjutnya diambil $a \in R^+$, dengan $x \in R$ dan $ax = xa$. Diperoleh

$$a^+x = a^+aa^+x = a^+a^+xa = a^+a^+xa^2a^+ = a^+axa(a^+)^2 = ax(a^+)^2 = xa^+$$

Hal ini memberikan arti bahwa jika $a \in R^+$, maka a^+ komutatif dengan elemen yang komutatif dengan a. Sudah dijelaskan sebelumnya bahwa jika $a \in R^+$ maka a^*a dan $a\,a^*$ anggota R^+, sehingga dapat disimpulkan $(a^*a)^+$ komutatif dengan elemen yang komutatif dengan a^*a. Demikian juga $(a\,a^*)^+$ komutatif dengan elemen yang komutatif dengan $a\,a^*$. Oleh karena jika $a \in R^{nor}$, maka a komutatif dengan a^*a dan $a\,a^*$. Sehingga untuk $a \in R^+$jika $a \in R^{nor}$, maka

$$a(a^*a)^+ = (a^*a)^+a$$

dan

$$a(aa^*)^+ = (aa^*)^+a$$

Seperti sudah disampaikan sebelumnya, bahwa jika $a \in R^+$, maka belum tentu a normal. D. Mosic dkk [10] menjelaskan syarat cukup a normal.

Lema 1. *Diketahui $a \in R^+$. Jika a normal maka $a^+a^* = a^*a^+$.*

Bukti :

$$\begin{aligned}
a^+a^* &= a^+aa^+a^* = a^+(aa^+)^*a^* = a^+(a^+)^*a^*a^* = a^+(a^+)^*a\,a^* = a^+(a^+a\,a^+)^*a\,a^*\\
&= a^+(a\,a^+)^*(\,a^+)^*a\,a^* = a^+aa^+(\,a^+)^*a\,a^* = a^+aa^+(\,a^*)^+a\,a^* = a^+aa^+a^+a\,a^*\\
&= (\,a^+a)^*a^+a^+a\,a^* = a^*(\,a^+)^*a^+a^+a\,a^* = a^*(\,a^*)^+a^+a^+a\,a^* = a^*a^+a^+a^+a\,a^*\\
&= a^*a^+a^+(\,a^+a)^*\,a^* = a^*a^+a^+a^*(\,a^+)^*\,a^* = a^*a^+a^+a^*(\,a^*)^+\,a^*\\
&= a^*a^+a^+a^*a^+\,a^* = a^*a^+a^+aa^+\,a = a^*a^+a^+a = a^*a^+(a^+a)^* = a^*a^+a^*(a^+)^*\\
&= a^*a^+a^*(a^*)^+ = a^*a^+aa^+\\
&= a^*a^+
\end{aligned}$$

Pernyataan pada Lema 1 tidak berlaku sebaliknya. Sebagai contoh pada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ dengan involusi transpose "T", diperoleh bahwa $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ dan $A^+A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = A^TA^+$. Sedangkan A tidak normal, sebab $AA^T \neq A^TA$.
Selanjutnya diperoleh $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ dengan involusi transpose "T", diperoleh bahwa $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ dengan sifat $A^+A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^TA^+$, $A^+A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = AA^+$ dan A normal.

Menggunakan hasil yang sudah diperoleh, [7] menjelaskan syarat cukup elemen di R^+ adalah normal.

Lema 2. *Diketahui $a \in R^+$. Jika a normal maka $a^+a = aa^+$.*

Bukti :
$a^+a = a^+aa^+a = a^+(aa^+)^*a = a^+(a^+)^*a^*a = a^+(a^+)^*aa^* = aa^+(a^+)^*a^* = aa^+(aa^+)^* = aa^+aa^+ = aa^+$

Menggunakan Lema 1 dan 2 , D. Mosic dkk [10] dan Y.Qu dkk [11] memperoleh Teorema 1 berikut.s

Teorema 1. *Diketahui $a \in R^+$. Elemen a normal jika dan hanya jika $a^+a = aa^+$ dan $a^+a^* = a^*a^+$.*

Bukti :
Jika a normal, maka dengan menggunakan Lemma 1 dan 2 diperoleh $a^+a = aa^+$ dan $a^+a^* = a^*a^+$. Sebalikanya menggunakan Teorema 1 diperoleh $aa^* = aa^*aa^+ = aa^*a^+a = aa^+a^*a = a^+aa^*a = a^*a$. Terbukti a normal.

Y.Qu dkk [11] pada Lema 3 berikut ini menjelaskan syarat $a^+a^* = a^*a^+$ jika $a \in R^+$

Lema 3. *Diketahui $a \in R^+$. Jika $a^+(a^+)^* = (a^+)^*a^+$ maka $a^+a^* = a^*a^+$.*

Bukti :
$$\begin{aligned} a^+a^* &= a^+aa^+a^* = (a^+a)^*a^+a^* = a^*(a^+)^*a^+a^* = a^*a^+(a^+)^*a^* = a^*a^+\,a\,a^+ \\ &= a^*a^+(\,a\,a^+)^* = a^*a^+\,a\,a^+ = a^*a^+ \end{aligned}$$

Pernyataan pada Lemma 3 tidak berlaku sebaliknya. Dapat ditunjukkan pada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ dengan involusi transpose "T", diperoleh $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ dan $A^+A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = A^TA^+$. Akan tetapi $A^+(A^+)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ dan $(A^+)^TA^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

III. KESIMPULAN

Pada Lema 3, baru diperoleh syarat perlu dari $a^+(a^+)^* = (a^+)^*a^+$ untuk $a \in R^+$, dan perlu dibangun syarat cukupya. Dengan memperoleh syarat perlu dan cukup $a^+(a^+)^* = (a^+)^*a^+$ untuk $a \in R^+$, akan dapat dibangun syarat perlu dan cukup $a \in R^+$ adalah normal, dengan melibatkan Teorema 1.

DAFTAR PUSTAKA

[1] J. J. Koliha, D. Djordjević, and D. Cvetković, "Moore-Penrose inverse in rings with involution," *Linear Algebra Appl.*, vol. 426, no. 2–3, pp. 371–381, 2007, doi: 10.1016/j.laa.2007.05.012.

[2] D. Mosić and D. S. Djordjević, "Some results on the reverse order law in rings with involution," *Aequationes Math.*, vol. 83, no. 3, pp. 271–282, 2012, doi: 10.1007/s00010-012-0125-2.

[3] S. R. R. M. Titi Udjiani, Harjito, Suryoto, and N. Prima P, "Generalized Moore Penrose Inverse of Normal Elements in a Ring with Involution," *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 300, no. 1, pp. 1–5, 2018, doi: 10.1088/1757-899X/300/1/012074.

[4] S. Xu and J. Chen, "The moore-penrose inverse in rings with involution," *Filomat*, vol. 33, no. 18, pp. 5791–5802, 2019, doi: 10.2298/FIL1918791X.

[5] R. Zhao, H. Yao, and J. Wei, "Moore-Penrose inverses in rings and weighted partial isometries in C*−algebras," *Appl. Math. Comput.*, vol. 395, no. 2020, p. 125832, 2021, doi: 10.1016/j.amc.2020.125832.

[6] P. S. Reddy and K. Benebere, "Involution on Rings," *SSRN Electron. J.*, no. March, 2019, doi: 10.2139/ssrn.3390376.

[7] O. M. Baksalary and G. Trenkler, "Characterizations of EP, normal, and Hermitian matrices," *Linear Multilinear Algebr.*, vol. 56, no. 3, pp. 299–304, 2008, doi: 10.1080/03081080600872616.

[8] W. Chen, "On EP elements, normal elements and partial isometries in rings with involution," *Electron. J. Linear Algebr.*, vol. 23, no. 174007, pp. 553–561, 2012, doi: 10.13001/1081-3810.1540.

[9] D. S. Djordjević, "Characterizations of normal, hyponormal and EP operators," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 329, no. 2, pp. 1181–1190, 2007, doi: 10.1016/j.jmaa.2006.07.008.

[10] D. Mosić and D. S. Djordjević, "Moore-Penrose-invertible normal and Hermitian elements in rings," *Linear Algebra Appl.*, vol. 431, no. 5–7, pp. 732–745, 2009, doi: 10.1016/j.laa.2009.03.023.

[11] Y. Qu, J. Wei, and H. Yao, "Characterizations of normal elements in rings with involution," *Acta Math. Hungarica*, vol. 156, no. 2, pp. 459–464, 2018, doi: 10.1007/s10474-018-0874-z.

[12] A. Ben-Israel, "The Moore of the Moore-Penrose inverse," *Electron. J. Linear Algebr.*, vol. 9, no. August, pp. 150–157, 2002, doi: 10.13001/1081-3810.1083.

[13] E. Boasso, "Moore-Penrose inverse and doubly commuting elements in C^*-algebras," pp. 35–44, 2013, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1309.6911

[14] D. Mosić and D. S. Djordjević, "Weighted partial isometries and weighted-EP elements in C∗-algebras," *Appl. Math. Comput.*, vol. 265, no. 174007, pp. 17–30, 2015, doi: 10.1016/j.amc.2015.04.102.

[15] D. Mosić, C. Deng, and H. Ma, "On a weighted core inverse in a ring with involution," *Commun. Algebr.*, vol. 46, no. 6, pp. 2332–2345, 2018, doi: 10.1080/00927872.2017.1378895.

[16] T. Udjiani and Suryoto, "Commutative symmetric element in a ring with involution," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1943, no. 1, pp. 1–4, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1943/1/012116.