Barisan (x_k) di dalam ruang bernorma-n $(X, \| \cdot, ..., \cdot \|)$ disebut barisan Cauchy terhadap norma-n jika

$$\lim_{k,l\to\infty} \| x_k - x_l, u_2, ..., u_n \| = 0, \text{ untuk setiap } u_2, ..., u_n \in X.$$

Ruang bernorma-n $(X, \| \cdot, ..., \cdot \|)$ disebut ruang Banach-n jika untuk setiap barisan Cauchy di dalam X merupakan barisan konvergen.

Berdasarkan konsep dual Köthe-Toeplitz dari suatu ruang barisan, Dutta [2] mendefinisikan dual Köthe-Toeplitz dari $\omega(E)$ ruang barisan bernorma-n. Lebih lanjut, Dutta [2] dan Dutta [3] mengkonstruksi dual Köthe-Toeplitz dari suatu ruang kelas barisan pada ruang berenorma-n.

Pada tulisan ini, dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz dari beberapa ruang barisan selisih diperumum tipe Cesaro pada ruang bernorma-n. Konstruksi ini dilakukan untuk mempermudah dalam penentuan dual Köthe-Toeplitz.

II. RUANG BARISAN SELISIH DIPERUMUM CESARO PADA RUANG BERNORMA-n

Berikut ini didefinisikan beberapa ruang barisan selisih diperumum Cesaro pada ruang bernorma-n.

Definisi 1 *Diberikan X ruang vektor real bernorma-n dan $\omega(X) = \{x = (x_k) : x_k \in X,$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}\}$. Untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, $g = (g_k)$ suatu barisan bilangan real tidak nol dan $1 \le p < \infty$, serta untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ didefinisikan*

$$C_p(\Delta_g^m, X) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(X) : \sum_{i=1}^{\infty} \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \infty\},$$

$$C_\infty(\Delta_g^m, X) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(X) : \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) < \infty\},$$

$$l_p(\Delta_g^m, X) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(X) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \infty\},$$

$$l_\infty(\Delta_g^m, X) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(X) : \sup_k \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < \infty\},$$

$$O_p(\Delta_g^m, X) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(X) : \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \infty\},$$

$$O_\infty(\Delta_g^m, X) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(X) : \sup_i \left(\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) < \infty\}$$

dengan

$$\Delta_g^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} g_{k+v}.$$

Dari definisi tersebut diperoleh teorema berikut.

Teorema 1 *Diberikan X ruang Banach-n dan $1 \leq p < \infty$.*

1. *Ruang $l_p(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang Banach-n terhadap norma-n yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x^1, ..., x^n \|_{l_p}^{\Delta_g^m} = \begin{cases} 0, \textit{ jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bergantung linear dan} \\ \\ \sum_{k=1}^{m} \| x_k g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \\ +(\sum_{k=1}^{\infty} \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ \quad \textit{jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bebas linear} \end{cases}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$.

2. *Ruang $C_p(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang Banach-n terhadap norma-n yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x^1, ..., x^n \|_{C_p}^{\Delta_g^m} = \begin{cases} 0, \textit{ jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bergantung linear dan} \\ \\ \sum_{k=1}^{m} \| x_k g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \\ +(\sum_{i=1}^{\infty} \| \dfrac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ \quad \textit{jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bebas linear} \end{cases}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$.

3. *Ruang $O_p(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang Banach-n terhadap norma-n yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x^1, ..., x^n \|_{O_p}^{\Delta_g^m} = \begin{cases} 0, \textit{ jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bergantung linear dan} \\ \\ \sum_{k=1}^{m} \| x_k g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \\ +(\sum_{i=1}^{\infty} (\dfrac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|)^p)^{\frac{1}{p}}, \\ \quad \textit{jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bebas linear} \end{cases}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$.

4. *Ruang $l_\infty(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang Banach-n terhadap norma-n yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x^1, ..., x^n \|_{l_\infty}^{\Delta_g^m} = \begin{cases} 0, \textit{ jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bergantung linear dan} \\ \\ \sum_{k=1}^{m} \| x_k g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| + \sup_k \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|, \\ \quad \textit{jika } x^1, ..., x^n, \textit{ bebas linear} \end{cases}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$.

5. *Ruang* $C_\infty(\Delta_g^m, X)$ *merupakan ruang Banach-*n *terhadap norma-*n *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x^1, ..., x^n \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} = \begin{cases} 0, \text{ jika } x^1, ..., x^n, \text{ bergantung linear dan} \\ \\ \sum_{k=1}^m \| x_k g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \\ + \sup_i \| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|, \\ \quad \text{jika } x^1, ..., x^n, \text{ bebas linear} \end{cases}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$.

6. *Ruang* $O_\infty(\Delta_g^m, X)$ *merupakan ruang Banach-*n *terhadap norma-*n *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x^1, ..., x^n \|_{O_\infty}^{\Delta_g^m} = \begin{cases} 0, \text{ jika } x^1, ..., x^n, \text{ bergantung linear dan} \\ \\ \sum_{k=1}^m \| x_k g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \\ + \sup_i \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|, \\ \quad \text{jika } x^1, ..., x^n, \text{ bebas linear} \end{cases}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$.

Bukti. Mudah ditunjukkan bahwa $l_p(\Delta_g^m, X), l_\infty(\Delta_g^m, X), C_p(\Delta_g^m, X), C_\infty(\Delta_g^m, X)$, $O_p(\Delta_g^m, X)$ dan $O_\infty(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang bernorma-n terhadap norma-n yang bersesuaian. Selanjutnya, akan ditunjukkan $C_\infty(\Delta_g^m, X)$ ruang Banach-n. Untuk ruang yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $(x^s) = (x_i^s) = (x_1^s, x_2^s, ...)$ barisan Cauchy di dalam $C_\infty(\Delta_g^m, X)$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk setiap $s, t \geq n_0$ dan untuk setiap $u^2, ..., u^n \in C_\infty(\Delta_g^m, X)$ berlaku

$$\begin{aligned} &\|x^s - x^t, u^2, ..., u^n \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \| (x_k^s - x_k^t) g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| + \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t), z_1, ..., z_{n-1} \| \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$. Akibatnya, untuk setiap $s, t \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{k=1}^m \| (x_k^s - x_k^t) g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < \varepsilon \tag{1}$$

dan

$$\sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t), z_1, ..., z_{n-1} \| \right) < \varepsilon, \tag{2}$$

untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ dan $z_1, ..., z_{n-1} \in X$. Dengan demikian untuk setiap $k = 1, ..., m$ dan

$s, t \geq n_0$, berlaku $\| (x_k^s - x_k^t)g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $k = 1, ..., m$, $(x_k^s)_{s=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy di X. Karena X ruang Banach-n, maka $(x_k^s)_{s=1}^{\infty}$ konvergen, katakan ke $x_k \in X$, untuk $k = 1, ..., m$. Dengan kata lain

$$\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k, \text{ untuk } k = 1, ..., m. \tag{3}$$

Selanjutnya, dipunyai $\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s + x_k^t), z_1, ..., z_{n-1} \| < \varepsilon$, untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$, $s, t \geq n_0$ dan untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Karena berlaku untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, maka didapatkan $(\Delta_g^m(x_k^s))_{s=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy di $C_\infty(X)$ yang lengkap. Akibatnya, $(\Delta_g^m(x_k^s))_{s=1}^{\infty}$ konvergen, katakan ke $y = (y_k) \in C_\infty(X)$, sehingga diperoleh $\lim_{s\to\infty} \Delta_g^m(x_k^s) = y_k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
Untuk $k = 1$ didapatkan

$$\begin{aligned} y_1 = \lim_{s\to\infty} \Delta_g^m(x_1^s) &= \lim_{s\to\infty} \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \tbinom{m}{v} x_{1+v}^s g_{1+v} \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(\sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \tbinom{m}{v} x_{1+v}^s g_{1+v} + (-1)^m x_{1+m} g_{1+m} \right) \\ &= \sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \tbinom{m}{v} \lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s g_{1+v} + (-1)^m \lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s g_{1+m}. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k$, untuk setiap $k = 1, ..., m$, maka $\lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s = x_{1+v}$, untuk $v = 1, ..., m-1$. Karena $\lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s$ ada dan $\sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \binom{m}{v} \lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s g_{1+v}$ ada, maka diperoleh $\lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s$ ada, katakan $x_{1+m} = \lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s$.

Proses tersebut dilanjutkan untuk $k = 2, 3, 4, ...$, sehingga diperoleh

$$x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^s, \text{ untuk setiap } k > m. \tag{4}$$

Berdasarkan Persamaan 3 dan Persamaan 4 didapatkan

$$x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^s, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

dan

$$\Delta_g^m x_k = \lim_{s\to\infty} \Delta_g^m x_k^s, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan 1 dan 2, untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ dan $s \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{m} \| (x_k^s - x_k)g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \| (x_k^s - x_k^t)g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < \varepsilon$$

dan

$$\sup_i \| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k), z_1, ..., z_{n-1} \| = \lim_{t\to\infty} \sup_i \| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t), z_1, ..., z_{n-1} \| < \varepsilon.$$

Dibentuk $x = (x_k)$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in C_\infty(\Delta^m, X)$. Untuk sebarang $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ dan $s \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned}\sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) \leq & \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k - x_k^s), z_1, ..., z_{n-1} \| \right) \\ & + \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k^s, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) \\ < & \infty.\end{aligned}$$

Jadi, $x \in C_\infty(\Delta_g^m, X)$. Selanjutnya, untuk setiap $u^2, ..., u^n \in C_\infty(\Delta_g^m, X)$ dan $s \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned}\| x^s - x, u^2, ..., u^n \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} = & \sum_{k=1}^{m} \| (x_k^s - x_k) g_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \\ & + \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k), z_1, ..., z_{n-1} \| \right) \\ < & 2\varepsilon\end{aligned}$$

Dengan demikian, $C_\infty(\Delta_g^m, X)$ ruang Banach-n terhadap norma $\| \cdot, ..., \cdot \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m}$. □

Lebih lanjut, diperoleh teorema berikut.

Teorema 2 *Ruang $Z(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang BK-n, dengan $Z = l_p, C_p, O_p, l_\infty, C_\infty, O_\infty$, untuk $1 \leq p < \infty$.*

Bukti. Ditunjukkan untuk $Z = C_\infty$. Untuk ruang yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama.

Diambil sebarang barisan x^s yang konvergen, maka terdapat $x \in C_\infty(\Delta_g^m, X)$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned}& \| x^s - x, u_2, ..., u_n \|_\infty \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{m} \| (x_k^s - x_k) g_k, u_2, ..., u_n \| + \sup_i \| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k), u_2, ..., u_n \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty.\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\sum_{k=1}^{m} \| (x_k^s - x_k) g_k, u_2, ..., u_n \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \tag{5}$$

dan

$$\sup_i \| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k), u_2, ..., u_n \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \tag{6}$$

Dari Persamaan 5 diperoleh

$$\| (x_k^s - x_k)g_k, u_2, ..., u_n \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \text{ dan untuk } k = 1, ..., m.$$

Dengan kata lain

$$\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k, \text{ untuk } k = 1, ..., m.$$

Dari Persamaan 6 diperoleh

$$\| \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k), u_2, ..., u_n \| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \text{ dan untuk setiap } i \in \mathbb{N}.$$

Dengan kata lain

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k) = 0, \text{ untuk setiap } i \in \mathbb{N}.$$

Karena

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \Delta_g^m (x_k^s - x_k) &= \lim_{s\to\infty} \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \tbinom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) g_k \\
&= \lim_{s\to\infty} \left(\sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \tbinom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) g_k + (-1)^m (x_{k+m}^s - x_{k+m}) g_k \right) \\
&= \sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \tbinom{m}{v} \lim_{s\to\infty} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) g_k + (-1)^m \lim_{s\to\infty} (x_{k+m}^s - x_{k+m}) g_k,
\end{aligned}$$

maka untuk $k = 1$ diperoleh

$$\lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s = x_{1+m}.$$

Proses dilanjutkan untuk $i = 2, 3, ...$, sehingga diperoleh

$$\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

Jadi, $C_\infty(\Delta_g^m, X)$ merupakan ruang BK-n. □

Berikut hubungan antar kelas barisan selisih Cesaro pada ruang bernorma-n.

Teorema 3 *Ruang* $Z(\Delta_g^{m-1}, X) \subset Z(\Delta_g^m, X)$, *dengan* $Z = l_p, C_p, O_p, l_\infty, C_\infty, O_\infty$, *untuk* $1 \leq p < \infty$. *Lebih lanjut,* $Z(\Delta_g^i, X) \subset Z(\Delta_g^m, X)$, *untuk* $i = 1, ..., m-1$.

Bukti. Ditunjukkan untuk $Z = C_\infty$. Untuk kelas yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama.

Diambil sebarang $x = (x_k) \in C_\infty(\Delta_g^{m-1}, X)$ dengan $m \geq 2$. Untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$, $z_j \neq 0$, dengan $j = 1, ..., n-1$ berlaku

$$\sup_i \left(\| \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} \Delta_g^{m-1} x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) < \infty.$$

Karena $\Delta_g^m x_k = \Delta_g^{m-1} x_k - \Delta_g^{m-1} x_{k+1}$, maka untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) \leq \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^{m-1} x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right) + \sup_i \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^{m-1} x_{k+1}, z_1, ..., z_{n-1} \| \right).$$

Jadi, $C_\infty(\Delta_g^{m-1}, X) \subset C_\infty(\Delta_g^m, X)$. Lebih lanjut, untuk $m \geq 2$ berlaku

$$C_\infty(\Delta_g^1, X) \subset C_\infty(\Delta_g^2, X) \subset ... \subset C_\infty(\Delta_g^{m-1}, X) \subset C_\infty(\Delta_g^m, X).$$

Dengan demikian untuk $i = 1, 2, ..., m-1$ diperoleh $C_\infty(\Delta_g^i, X) \subset C_\infty(\Delta_g^m, X)$. □

Teorema 4 *Jika* $1 \leq p < \infty$*, maka*

1. $l_p(\Delta_g^m, X) \subset l_\infty(\Delta_g^m, X) \subset O_\infty(\Delta_g^m, X)$,
2. $O_p(\Delta_g^m, X) \subset C_p(\Delta_g^m, X) \subset C_\infty(\Delta_g^m, X)$, *dan*
3. $O_p(\Delta_g^m, X) \subset O_\infty(\Delta_g^m, X) \subset C_\infty(\Delta_g^m, X)$.

Bukti. 1. Diambil sebarang $x = (x_k) \in l_p(\Delta_g^m, X)$, dengan $1 \leq p < \infty$. Untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$, $z_j \neq 0$, dengan $j = 1, ..., n-1$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \|^p < \infty.$$

Akibatnya ada $M > 0$ sehingga berlaku $\| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < M$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, $\sup_k \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < M < \infty$. Jadi, $l_p(\Delta_g^m, X) \subset l_\infty(\Delta_g^m, X)$.

Selanjutnya, diambil sebarang $(x_k) \in l_\infty(\Delta_g^m, X)$. Untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$, $z_j \neq 0$, dengan $j = 1, ..., n-1$ berlaku $\sup_k \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < \infty$. Dengan demikian ada $M > 0$ sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ berlaku $\| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < M$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\sup_i \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \| \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| < M.$$

Jadi, $l_\infty(\Delta_g^m, X) \subset O_\infty(\Delta_g^m, X)$.

2. Bukti mengikuti (1).

3. Bukti mengikuti (1).

□

Teorema 5 *Jika* $1 \leq p < q$*, maka*

1. $C_p(\Delta_g^m, X) \subset C_q \Delta_g^m, X)$,

2. *$O_p(\Delta_g^m, X) \subset O_q(\Delta_g^m, X)$, dan*

3. *$l_p(\Delta_g^m, X) \subset l_q(\Delta_g^m, X)$.*

Bukti. 1. Diambil sebarang $x = (x_k) \in C_p(\Delta_g^m, X)$, dengan $1 \leq p < q$. Untuk setiap $z_1, ..., z_{n-1} \in X$, $z_j \neq 0$, dengan $j = 1, ..., n-1$, berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \infty,$$

sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \varepsilon. \tag{7}$$

Karena $1 \leq p < q$, maka untuk setiap $i \geq n_0$ dan $0 < \varepsilon < 1$ berlaku

$$\left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^q < \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \varepsilon < 1. \tag{8}$$

Oleh karena itu, berdasarkan Persamaan 7 dan Persamaan 8 didapatkan

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^q < \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^p < \varepsilon.$$

Dengan demikian,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\| \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k, z_1, ..., z_{n-1} \| \right)^q < \infty.$$

Jadi, $C_p(\Delta_g^m, X) \subset C_q(\Delta_g^m, X)$, untuk $1 \leq p < q$.

2. Bukti mengikuti (1).

3. Bukti mengikuti (1).

□

III. DUAL KÖTHE-TOEPLITZ

Diberikan E ruang bernorma-n dan himpunan semua fungsional linear kontinu pada E dinotasikan dengan E^*. Berdasarkan Gozali et. al. [9] fungsi $\| \cdot, ..., \cdot \|: (E^*)^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$\| f_1, ..., f_n \| = \sup_{\substack{x_i \in E \\ \| x_1, ..., x_n \|_X \leq 1}} \text{abs} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

merupakan norma-n pada E^*.

Selanjutnya, diberikan E ruang bernorma-n dan $Z(E)$ ruang barisan dengan setiap elemen barisannya anggota E. Dutta [2] mendefinisikan dual Köthe-Toeplitz dari ruang barisan $Z(E)$, yaitu

$$[Z(E)]^\alpha = \{(y_k) : y_k \in E^*, k \in \mathbb{N} \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k, u_2, ..., u_n \|_E \; \| y_k, v_2, ..., v_n \|_{E^*} < \infty, \\ \text{untuk setiap } u_2, ..., u_n \in E, v_2, ..., v_n \in E^*, (x_k) \in Z(E)\}.$$

Mudah ditunjukkan jika $X, Y \subset Z(E)$ ruang bernorma-n dengan $X \subset Y$, maka $[Y]^\alpha \subset [X]^\alpha$.

Diberikan X ruang bernorma-n, didefinisikan

$$SZ(\Delta_g^m, X) = \{x = (x_k) : x \in Z(\Delta_g^m, X), x_1 = ... = x_m = 0\}, \text{ dengan } Z = l_\infty, C_\infty, O_\infty$$

dan

$$U = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} < \infty, \text{ untuk setiap } z_2, ..., z_n \in X^*\}.$$

Lemma 1 *Jika* $x \in SC_\infty(\Delta_g^m, X)$*, maka* $\sup_k k^{-m} \| x_k g_k, u_2, ..., u_n \| < \infty$.

Bukti. Bukti mengikuti Lemma 4.2. pada Dutta [2] dengan mengganti Δ^m dengan Δ_g^m. □

Teorema 1 $[Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha = U$.

Bukti. Jika $a \in U$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} < \infty$, artinya ada $M_1 > 0$ sehingga berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} < M_1$. Berdasarkan Lema 1 maka ada $M_2 > 0$ sehingga $k^{-m} \| x_k g_k, u_2, ..., u_n \|_X < M_2$, untuk setiap $x_k \in Sl_\infty(\Delta_g^m, X)$. Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \| x_k, u_2, ..., u_n \|_X \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{\infty} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \; k^{-m} \| x_k g_k, u_2, ..., u_n \|_X \\
&\qquad < M_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \\
&\qquad < M_2 M_1 \\
&\qquad < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$. Selanjutnya, jika $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k, u_2, ..., u_n \|_X \; \| a_k z_2, ..., z_n \|_{X^*} < \infty,$$

untuk setiap $v_2, ..., v_n \in X^*, (x_k) \in Sl_\infty(\Delta_g^m, X)$. Dibentuk barisan $x = (x_k)$ dengan

$$x_k g_k = \begin{cases} 0, k \leq m \\ k^m, k > m. \end{cases}$$

Selanjutnya, dipilih $u_2, ..., u_n \in X$ sedemikian sehingga berlaku

$$\| k^m, u_2, ..., u_n \|_X = k^m \| 1, u_2, ..., u_n \|_X = \begin{cases} 0, k \leq m \\ k^m, k > m. \end{cases}$$

Akibatnya, untuk setiap $z_2, ..., z_n \in X^*$ berlaku

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{m} k^m \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} + \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k g_k, u_2, ..., u_n \|_X \ \| a_k g_k^{-1}, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \\ &\quad < \infty. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $a \in U$. □

Teorema 2 $[Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha = [l_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$.

Bukti. Diketahui $Sl_\infty(\Delta_g^m, X) \subset l_\infty(\Delta_g^m, X)$, maka diperoleh

$$[l_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha \subset [Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha.$$

Diambil sebarang $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$ dan $x = x_k \in l_\infty(\Delta_g^m, X)$. Karena $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$, maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \ \| y_k, u_2, ..., u_n \|_X < \infty,$$

untuk setiap $z_2, ..., z_n \in X^*$, $u_2, ..., u_n \in X$, dan $(y_k) \in Sl_\infty(\Delta_g^m, X)$. Selanjutnya dibentuk barisan $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ dengan

$$\bar{x}_k = \begin{cases} 0, k \leq m \\ x_k, k > m, \end{cases}$$

maka $\bar{x} \in Sl_\infty(\Delta_g^m, X)$. Akibatnya, untuk setiap $z_2, ..., z_n \in X^*$ dan $u_2, ..., u_n \in X^*$ berlaku

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \| a_k, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \ \| x_k, u_2, ..., u_n \|_X \\ &= \sum_{k=1}^{m} \| a_k, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \ \| x_k, u_2, ..., u_n \|_X \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \| a_k, z_2, ..., z_n \|_{X^*} \ \| \bar{x}_k, u_2, ..., u_n \|_X \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $a \in [l_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$. □

Teorema 3 $U = [l_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha = [O_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha = [C_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1 dan 2 diperoleh bahwa $U = [l_\infty(\Delta_g^m, X)]^\alpha$. Selanjutnya, untuk kelas $C_\infty(\Delta_g^m, X)$ dan $O_\infty(\Delta_g^m, X)$, bukti menggukan teknik yang sama seperti pada Teorema 1 dan 2. □

IV. KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Pada tulisan ini, hanya dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk $l_\infty(\Delta_g^m, X)$, $C_\infty(\Delta_g^m, X)$ dan $O_\infty(\Delta_g^m, X)$. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengkonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk kelas yang lain.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada penilai yang telah memberikan saran.

REFERENSI

[1] Ahmad, M., Beberapa Kelas Barisan Selisih Diperumum Tipe Cesaro, *JFMA*, vol. 5, no. 1, pp. 23-34, 2022.

[2] Dutta, H., Some Classes of Cesaro-Type Difference Sequence Over n-Normed Spaces, *Advances in Difference Equations*, vol.1 , pp. 286, 2013.

[3] Dutta, H., Kothe-Toeplitz Duals of Some n-Normed Valued Difference Sequence Spaces, *Maejo Int. J. Sci. Technol*,vol. 9, no. 2, pp. 255-264, 2015.

[4] Et, M., On Some Generalized Cesaro Difference Sequence Spaces, *Istanbul Univ. Fen Fak. Mat. Dergrisi*,vol. 55-56, pp. 221-229, 1996-1997.

[5] Et, M. dan Çolak, R., On Some Generalized Diffeerence Sequence Spaces, *Soochow J. Math.*, ,vol. 21, pp. 377-386, 1995.

[6] Gähler, S., Lineare 2-Normierte Räume, *Math. Nachr.*,vol. 28, pp. 1-43, 1964.

[7] Gähler, S., Untersuchungen Über Verallgemeinerte m-Metrische Räume. I, *Math. Nachr.*,vol. 40, pp. 165-189, 1969.

[8] Garling, D.J. H., The β- and γ-duality of Sequence Spaces, *Proc. Camb. Phil. Soc.*,vol. 63,pp. 963, 1967.

[9] Gozali, S.H., Gunawan, H., dan Neswan, O., On n-Norms, and Bounded n-Linear Functionals in a Hilbert Space, *Mathematics Subject Classification*,vol. 1, no. 1, pp. 72-79, 2010.

[10] Gunawan, H., On n-Inner Product, n-Norms, and The Cauchy-Schwarz Inequality, *Scientiae Mathematicae Japanicae Online*,vol. 5,pp. 47-54, 2001.

[11] Gunawan, H. dan Mashadi, M., On n-Normed Spaces, *Int. J. Math. Sci.*,vol. 27,pp. 631-639, 2001.

[12] Kizmaz, H., On Certain Sequence Spaces, *Soochow J. Math.*,vol. 24,pp. 169-176, 1981.

[13] Misiak, A., n-Inner Product Spaces, *Math. Nachr.*,vol. 140,pp. 299-319, 1989.

[14] Ng, PN. and Lee, P.Y., Cesaro Sequence Spaces of Non Absolute Type, *Comment. Math.*,vol. 20,pp. 429-433, 1978.

[15] Orhan, C., Cesaro Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations, *Commun. Fac. Sci.Univ. Ankara, Ser. A.*,vol. 32,pp. 55-63, 1983.

[16] Shiue, J.S., On The Cesaro Sequence Spaces, *Thamkang J. Math.*,vol. 1,pp. 19-25, 1970.