JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

HIMPUNAN SISTEM-m_β DAN RADIKAL PRIMA-β GABUNGAN SUATU (R, S)-MODUL

Dian Ariesta Yuwaningsih[1*], Rusmining[1], Angga Dewanta Agastya[1],
Afifah Althafinisa[1], Kaisar Pradipta Bhagaskara[1]

[1]*Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta*
Email: [1*]dian.ariesta@pmat.uad.ac.id

Abstract. The jointly prime submodule of (R,S)-modules has been generalized into jointly β-prime submodules. The primeness of an (R,S)-module cannot be separated from its prime radical. On the other hand, prime radicals cannot be separated from their multiplicative closed sets. In this research, the definition of a multiplicative closed set on (R,S)-modules relative to the jointly prime-β submodule is presented, hereinafter referred to as the m_β-system set. Then we show that the m_β-system set is the complement of a jointly β-prime (R,S)-submodule. In addition, we also define the jointly β-prime radical of an (R,S)-module and present some of its properties. At the end of this study, we show that in the left multiplication (R,S)-module, the jointly β-prime radical of the two (R,S)-submodule slices in M is equal to the intersection of the two jointly β-prime radicals of each (R,S)-submodule.
Keywords: (R,S)-module, β-prime submodule, jointly β-prime submodule

Abstrak. Submodul prima gabungan pada (R,S)-modul telah mengalami perumuman menjadi submodul prima-β gabungan. Keprimaan pada suatu (R,S)-modul tidak terlepas dari radikal primanya. Di sisi lain, radikal prima tidak terlepas dari himpunan tertutup multiplikatifnya. Pada penelitian ini disajikan definisi himpunan tertutup multiplikatif pada (R,S)-modul relatif terhadap submodul prima-β gabungan, yang selanjutnya disebut himpunan sistem-m_β. Kemudian ditunjukkan bahwa himpunan sistem-m_β merupakan komplemen dari suatu (R,S)-submodul prima-β gabungan. Selain itu, didefinisikan pula radikal prima-β gabungan pada (R,S)-modul dan beberapa sifatnya. Pada akhir penelitian ini, ditunjukkan bahwa pada (R,S)-modul perkalian kiri M, radikal prima-β gabungan dari irisan dua (R,S)-submodul di M sama dengan irisan dua radikal prima-β gabungan dari masing-masing (R,S)-submodulnya.
Kata Kunci: (R,S)-modul, submodul prima-β, radikal prima-β gabungan

I. PENDAHULUAN

Pada keseluruhan tulisan ini, R dan S masing-masing merupakan ring komutatif dengan elemen satuan tak nol dan M merupakan (R, S)-modul kecuali dinyatakan selain itu. Diberikan $(G, +)$ merupakan suatu grup dan himpunan $N \subseteq G$. Merujuk pada paper [1] dan [2], apabila diberikan grup $(G, +)$ dan himpunan bagian N di G, maka didefinisikan himpunan $\alpha(N) = \{n \in G \mid n + n \in N\}$ dan $\beta(N) = \{n + n \mid n \in N\}$. Jelas bahwa $\beta(N) \subseteq N \subseteq \alpha(N)$. Kemudian apabila diberikan ring R dan N merupakan ideal di R, maka $\alpha(N)$ dan $\beta(N)$ masing-masing juga merupakan ideal di ring R. Begitu halnya apabila diberikan (R, S)-modul M dan

N merupakan (R, S)-submodul di M, maka $\alpha(N)$ dan $\beta(N)$ masing-masing juga merupakan (R, S)-submodul di M.

Dalam papernya, [1] mendefinisikan submodul prima-α sebagai perumuman dari submodul prima. Di paper yang lain, [2] mendefinisikan submodul prima-β sebagai perumuman dari submodul prima. Selain itu, [1] dan [2] juga mendefinisikan himpunan tertutup multiplikatif pada suatu modul, tetapi penelitiannya tidak sampai radikal primanya. Konsep submodul prima-α pada [1], telah dibawa ke struktur (R, S)-modul oleh [3], yang selanjutnya disebut dengan (R, S)-submodul prima-α gabungan. Kemudian, penelitian terkait (R, S)-submodul prima-α gabungan dilanjutkan oleh [4] hingga radikal primanya, yang selanjutnya disebut dengan radikal prima-α gabungan. Di sisi lain, konsep submodul prima-β juga telah dibawa ke dalam struktur (R, S)-modul, yang selanjutnya disebut (R, S)-submodul prima-β gabungan. Namun, penelitian terkait (R, S)-submodul prima-β gabungan ini belum diteliti hingga radikal primanya. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan disajikan hasil tentang radikal prima-β gabungan pada (R, S)-modul sebagai perumuman radikal prima gabungan pada [5]. Namun sebelumnya akan disajikan terlebih dahulu definisi dari himpunan tertutup multiplikatif pada (R, S)-modul relatif terhadap (R, S)-submodul prima-β gabungan, yang selanjutnya disebut dengan himpunan sistem-m_β. Lebih lanjut, disajikan pula beberapa sifat dari himpunan sistem-m_β, radikal prima-β gabungan, serta hubungan diantara keduanya.

II. HIMPUNAN SISTEM-m_β

Konsep radikal prima pada suatu R-modul tidak bisa terlepas dari himpunan sistem-m dari modul tersebut. Adapun pendefinisian himpunan sistem-m pada R-modul ini bergantung pada definisi keprimaan pada submodulnya [6]. Beberapa peneliti dalam membawa keprimaan di dalam struktur (R, S)-modul ke radikalnya juga melalui himpunan sistem-m terlebih dahulu. Misalnya dalam paper [5], pendefinisian radikal prima gabungan pada (R, S)-modul melalui himpunan sistem-m. Di sisi lain, pada paper [4] pendefinisian radikal prima-α gabungan (R, S)-modul melalui himpunan sistem-m_α. Dengan merujuk pada penelitian-penelitian sebelumnya, sebelum membahas tentang radikal prima-β gabungan pada (R, S)-modul, pada bagian ini akan disajikan terlebih dahulu tentang konsep himpunan sistem-m_β pada (R, S)-modul.

Selanjutnya apabila diberikan (R, S)-modul M dan (R, S)-submodul N di M, maka didefinisikan annihilator dari (R, S)-modul faktor M/N adalah himpunan $(N :_R M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$. Merujuk pada [7], jika ring S memenuhi $S^2 = S$ maka dapat ditunjukkan bahwa himpunan $(N :_R M)$ membentuk ideal di R. Berikut diberikan definisi dari (R, S)-submodul prima-β gabungan.

Definisi 1 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R, S)-submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima-β gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$ maka berakibat $r + r \in (P :_R M)$ atau $m + m \in P$.*

Merujuk pada [7], apabila diberikan (R, S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, submodul sejati P di M disebut (R, S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $amS \in P$ maka berakibat $aMS \subseteq P$ atau $m \in P$. Dapat ditunjukkan bahwa setiap (R, S)-submodul prima gabungan di M merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan. Dengan demikian, (R, S)-submodul prima-β gabungan merupakan perumuman dari (R, S)-submodul prima gabungan.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu proposisi yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan. Sifat ini yang melibatkan ideal di dalam ring R dan (R,S)-submodul di dalam M, dan selanjutnya akan digunakan dalam menunjukkan suatu (R,S)-submodul membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 1 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul sejati P di M. Submodul P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan jika dan hanya jika untuk setiap ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$ maka berakibat $N + N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P:_R M)$.*

Bukti: $(\Rightarrow)$ Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$ tetapi $N + N \nsubseteq P$. Diambil sebarang $x \in I$ dan $n \in N$. Diperoleh $xnS \subseteq P$ tetapi $n + n \notin P$. Karena diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan, maka $x + x \in (P:_R M)$. Jadi, terbukti bahwa $I + I \subseteq (P:_R M)$.

$(\Leftarrow)$ Diambil sebarang elemen $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $rmS \subseteq P$ tetapi $m + m \notin P$. Diperhatikan bahwa karena R komutatif dan $S^2 = S$ maka diperoleh $RRrmSSS = RrRmSS^2 = Rr(RmS)S \subseteq RPS = P$. Dari sini, diperoleh $Rr + Rr \subseteq (P:_R M)$ atau $RmS + RmS \subseteq P$. Dari persamaan $Rr + Rr \subseteq (P:_R M)$, diperoleh $RrMS + RrMS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$, maka diperoleh $RrMSS + RrMSS \subseteq P$. Oleh karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka diperoleh $rMS + rMS \subseteq P$, sehingga diperoleh $r + r \in (P:_R M)$. Selanjutnya, karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka dari $RmS + RmS \subseteq P$ diperoleh $m + m \in P$. Jadi diperoleh bahwa $r + r \in (P:_R M)$ atau $m + m \in P$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Berikut disajikan suatu contoh (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Contoh 1 Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-modul. Dapat ditunjukkan bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-submodul prima-$\beta$ gabungan di $\mathbb{Z}$. Diambil sebarang ideal $I = (2k)\mathbb{Z}$ di $2\mathbb{Z}$ dan $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-submodul $N = m\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$, untuk suatu $k, m \in \mathbb{N}$. Apabila diketahui $INS = (2k)\mathbb{Z}(m\mathbb{Z})3\mathbb{Z} = (6km)\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$ dan $N + N = m\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = 2m\mathbb{Z} \nsubseteq 6\mathbb{Z}$, maka untuk berapapun nilai $k \in \mathbb{N}$ berlaku $(I + I)MS = \big((2k)\mathbb{Z} + (2k)\mathbb{Z}\big)\mathbb{Z}(3\mathbb{Z}) = (4k)\mathbb{Z}\mathbb{Z}(3\mathbb{Z}) = 12k\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-submodul prima-$\beta$ gabungan di $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya, berikut diberikan definisi dari himpunan tertutup multiplikatif pada (R,S)-modul M, yang selanjutnya disebut dengan himpunan sistem-m_β.

Definisi 2 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus \{0\}$ disebut himpunan sistem-m_β di M apabila untuk setiap ideal I di R serta untuk setiap (R,S)-submodul K dan N di M dengan sifat $(K + \beta(I)MS) \cap X \neq \emptyset$ dan $\big(K + \beta(N)\big) \cap X \neq \emptyset$ maka berakibat $(K + INS) \cap X \neq \emptyset$.*

Contoh 2 Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-modul. Himpunan $\mathbb{Z} \setminus 6\mathbb{Z}$ merupakan himpunan sistem-m_β di $\mathbb{Z}$.

Seperti halnya pada modul dalam [6], himpunan sistem-m_β ini ternyata merupakan komplemen dari (R,S)-submodul prima-β gabungan. Namun sebelumnya, merujuk pada [1], apabila diberikan grup $(G,+)$ serta subgrup A dan B di G maka diperoleh $A \subseteq \alpha(B)$ jika dan hanya jika $\beta(A) \subseteq B$. Sifat ini akan digunakan dalam pembuktian beberapa sifat selanjutnya.

Proposisi 2 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ serta (R,S)-submodul P di M. P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan jika dan hanya jika $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M.*

Bukti: $(\Rightarrow)$ Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Akan dibuktikan bahwa $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M. Diambil sebarang ideal I di R serta (R,S)-submodul K dan N di M dengan $(K + INS) \cap M \setminus P = \emptyset$. Dari sini diperoleh $K + INS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $K \subseteq P$ dan $INS \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan maka dari $INS \subseteq P$ diperoleh $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Akibatnya diperoleh $K + \beta(I)MS \subseteq P$ atau $K + \beta(N) \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(K + \beta(I)MS) \cap M \setminus P = \emptyset$ atau $\big(K + \beta(N)\big) \cap M \setminus P = \emptyset$. Dengan demikian, terbukti bahwa $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M. Akan dibuktikan bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$. Dari sini, berarti diperoleh $INS \cap M \setminus P = \emptyset$. Karena diketahui $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M, maka diperoleh $\beta(I)MS \cap M \setminus P = \emptyset$ atau $\beta(N) \cap M \setminus P = \emptyset$. Dari sini diperoleh $\beta(I)MS \subseteq P$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Dengan kata lain, diperoleh $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Berikut disajikan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan dan hubungannya dengan himpunan sistem-m_β.

Proposisi 3 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ dan (R,S)-submodul P di M. Pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.*

a. *P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M.*
b. *$M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M.*
c. *Untuk setiap ideal I di R dan setiap elemen $m \in M$, jika $\beta(I)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$ dan $m + m \in M \setminus P$ maka $ImS \cap M \setminus P \neq \emptyset$.*
d. *Untuk setiap elemen $r \in R$ dan setiap elemen $m \in M$, jika $(r + r)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$ dan $m + m \in M \setminus P$ maka $rRmS \cap M \setminus P \neq \emptyset$.*

Bukti: $(a \Leftrightarrow b)$ Jelas dari Proposisi 4.

$(b \Rightarrow c)$ Diketahui $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β di M. Diambil sebarang ideal I di R dan elemen $m \in M$ dengan $\beta(I)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$ dan $m + m \in M \setminus P$. Karena $m \in RmS$ maka diperoleh $m + m \in \beta(RmS)$. Akibatnya, diperoleh $\beta(RmS) \cap M \setminus P \neq \emptyset$. Karena $M \setminus P$ merupakan himpunan sistem-m_β, maka diperoleh $IRmS \cap M \setminus P \neq \emptyset$. Karena $S^2 = S$ maka diperoleh $ImS \subseteq IRmSS = IRmS \subseteq ImS$. Akibatnya, diperoleh $ImS = IRmS$, sehingga terbukti bahwa $ImS \cap M \setminus P \neq \emptyset$.

$(c \Rightarrow d)$ Diambil sebarang elemen $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $(r + r)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$ dan $m + m \in M \setminus P$. Karena $r \in rR$ dan $(r + r)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$, maka diperoleh $\beta(Rr)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$. Berdasarkan hipotesis, maka diperoleh $RrmS \cap M \setminus P \neq \emptyset$.

$(d \Rightarrow a)$ Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga memenuhi $r + r \notin (P:_R M)$ dan $m + m \notin P$. Berarti diperoleh $(r + r)MS \nsubseteq P$ dan $m + m \notin P$. Dari sini diperoleh $(r + r)MS \cap M \setminus P \neq \emptyset$ dan $m + m \notin P$. Berdasarkan hipotesis, maka diperoleh

$rRmS \cap M \setminus P \neq \emptyset$. Andaikan $rmS \in P$ maka dipeoroleh $rRmS \subseteq P$ sehingga $rRmS \cap M \setminus P = \emptyset$. Kontradiksi, sheingga $rmS \notin P$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Sifat berikut ini menunjukkan suatu syarat cukup agar suatu (R, S)-submodul membentuk (R, S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 4 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ serta himpunan sistem-m_β X di M. Jika P merupakan (R, S)-submodul di M yang maksimal terhadap sifat $P \cap X = \emptyset$, maka P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M.*

Bukti: Diketahui P merupakan (R, S)-submodul di M yang maksimal terhadap sifat $P \cap X = \emptyset$. Akan dibuktikan bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul N di M dengan $INS \subseteq P$. Andaikan $\beta(I) \nsubseteq (P:_R M)$ dan $\beta(N) \nsubseteq P$. Akibatnya, diperoleh bahwa $\beta(I)MS \nsubseteq P$ dan $\beta(N) \nsubseteq P$. Oleh karena diketahui P maksimal terhadap sifat $P \cap X = \emptyset$ maka diperoleh $(P + \beta(I)MS) \cap X \neq \emptyset$ dan $(P + \beta(N)) \cap X \neq \emptyset$. Karena X merupakan himpunan sistem-m_β di M, maka diperoleh $(P + INS) \cap X \neq \emptyset$. Karena $INS \subseteq P$, maka diperoleh $P \cap X \neq \emptyset$. Kontradiksi dengan $P \cap X = \emptyset$. Berarti pengandaian salah dan harus diingkar, sehingga haruslah $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(N) \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Apabila diberikan R-modul M dan submodul N di M, maka diperhatikan kembali himpunan $\sqrt{N} = \{a \in M \mid (\forall sistem - m\, X\, di\, M) a \in X \Rightarrow X \cap N \neq \emptyset\}$ pada paper [6]. Selanjutnya, berikut disajikan perumuman dari definisi himpunan $\sqrt{N}$ pada [6] untuk suatu (R, S)-submodul N di M, yang selanjutnya dinotasikan dengan himpunan $\sqrt[(R,S)_\beta]{N}$.

Definisi 3 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ serta (R, S)-submodul N di M. Apabila terdapat (R, S)-submodul prima-β gabungan yang memuat N, maka didefinisikan himpunan*

$$\sqrt[(R,S)_\beta]{N} := \left\{a \in M \mid \left(\forall sistem - m_\beta\, X\, di\, M\right) a \in X \Rightarrow X \cap N \neq \emptyset\right\}.$$

Apabila tidak terdapat (R, S)-submodul prima-β gabungan yang memuat N, maka didefinisikan himpunan $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} := M$.

Seperti halnya pada modul, berikut didefinisikan himpunan spectrum dari suatu (R, S)-modul, yaitu himpunan semua (R, S)-submodul prima-β gabungan.

Definisi 4 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R, S)-submodul N di M. Didefinisikan himpunan*

$$Spec_\beta^{jp}(M) := \{P \mid P\ merupakan\ (R, S) - submodul\ prima - \beta\ gabungan\ di\ M\}$$

dan himpunan $V_\beta^{jp}(N) := \left\{P \in Spec_\beta^{jp}(M) \mid N \subseteq P\right\}$.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu sifat terkait himpunan $V_\beta^{jp}(N)$ untuk suatu (R, S)-submodul N di M.

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

Proposisi 5 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$.*

a. *Jika diberikan $\{N_i\}_{i\in I}$ merupakan koleksi (R,S)-submodul di M, maka diperoleh $\bigcap_{i\in I} V_\beta^{jp}(N_i) = V_\beta^{jp}(\sum_{i\in I} N_i)$.*

b. *Jika N dan L merupakan (R,S)-submodul di M, maka diperoleh $V_\beta^{jp}(N) \cup V_\beta^{jp}(L) \subseteq V_\beta^{jp}(N \cap L)$.*

Bukti:

a. Diambil sebarang $P \in \bigcap_{i\in I} V_\beta^{jp}(N_i)$, maka $N_i \subseteq P$ untuk setiap $i \in I$. Karena P merupakan (R,S)-submodul di M, maka $\sum_{i\in I} N_i \subseteq P$. Jadi diperoleh $P \in V_\beta^{jp}(\sum_{i\in I} N_i)$. Dengan demikian, diperoleh $\bigcap_{i\in I} V_\beta^{jp}(N_i) \subseteq V_\beta^{jp}(\sum_{i\in I} N_i)$. Selanjutnya, diambil sebarang $K \in V_\beta^{jp}(\sum_{i\in I} N_i)$, maka diperoleh $\sum_{i\in I} N_i \subseteq K$. Akibatnya, diperoleh $N_i \subseteq K$ untuk setiap $i \in I$, sehingga diperoleh $K \in V_\beta^{jp}(N_i)$, untuk setiap $i \in I$. Dari sini, diperoleh $K \in \bigcap_{i\in I} V_\beta^{jp}(N_i)$ sehingga $V_\beta^{jp}(\sum_{i\in I} N_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} V_\beta^{jp}(N_i)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\bigcap_{i\in I} V_\beta^{jp}(N_i) = V_\beta^{jp}(\sum_{i\in I} N_i)$.

b. Diambil sebarang $P \in V_\beta^{jp}(N) \cup V_\beta^{jp}(L)$, maka $N \subseteq P$ atau $L \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $N \cap L \subseteq P$. Jadi, diperoleh $P \in V_\beta^{jp}(N \cap L)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $V_\beta^{jp}(N) \cup V_\beta^{jp}(L) \subseteq V_\beta^{jp}(N \cap L)$. □

Merujuk pada [6], diketahui bahwa himpunan $\sqrt{N} = M$ atau $\sqrt{N}$ merupakan irisan dari semua (R,S)-submodul prima gabungan P di M yang memuat N. Sifat ini juga berlaku pada (R,S)-modul, seperti yang disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 6 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika diberikan (R,S)-submodul N di M, maka $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} = M$ atau $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} \coloneqq \bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P$.*

Bukti: Misalkan $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} \neq M$, berarti himpunan $V_\beta^{jp}(N) \neq \emptyset$. Diambil sebarang $m \in \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$ dan sebarang $P \in V_\beta^{jp}(N)$. Selanjutnya, dibentuk sistem-m_β $X \coloneqq M \setminus P$ di M. Karena $N \subseteq P$ maka $X \cap N = \emptyset$. Akibatnya diperoleh $m \notin X$, sehingga $m \in P$. Jadi, terbukti bahwa $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} \subseteq \bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P$. Sebaliknya, diambil sebarang $a \in \bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P$. Andaikan $a \notin \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$, maka terdapat sistem-$m_\beta$ X sedemikian sehingga $a \in X$ tetapi $N \cap X = \emptyset$. Selanjutnya, dibentuk himpunan

$$\mathcal{H} = \{J \mid N \subseteq J, J\ (R,S) - \text{submodul di } M \text{ dengan } J \cap X = \emptyset\}.$$

Himpunan $\mathcal{H}$ merupakan relasi terurut parsial dengan relasi inklusi. Dengan menggunakan Lemma Zorn, maka $\mathcal{H}$ memiliki elemen maksimal yaitu (R,S)-submodul $K \supseteq N$ yang maksimal terhadap sifat $K \cap X = \emptyset$. Berdasarkan Proposisi 4 maka diperoleh bahwa K

merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, sehingga diperoleh $K \in V_\beta^{jp}(N)$. Dengan demikian diperolej $a \in K$. Padahal $a \in X$, sehingga diperolej $K \cap X \neq \emptyset$. Terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar sehingga diperoleh $a \in \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$. Jadi terbukti bahwa $\bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P \subseteq \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$, sehingga terbukti $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} \coloneqq \bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P$. □

Diberikan ring R sebarang dan ideal I di R. Merujuk pada [8], diketahui bahwa $\sqrt{I}$ sama dengan R atau merupakan irisan dari semua ideal prima di R yang memuat I. Jika diberikan (R,S)-submodul N di M, diketahui bahwa $(N:_R M)$ merupakan ideal di R. Berdasarkan [8], diperoleh bahwa $\sqrt{(N:_R M)}$ sama dengan R atau merupakan irisan semua ideal prima di R yang memuat $(N:_R M)$. Selanjutnya, berikut diberikan hubungan antara himpunan $\sqrt{(N:_R M)}MS$ dengan $\sqrt[(R,S)_\beta]{N}$ untuk suatu (R,S)-submodul N di M.

Proposisi 7 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika diberikan (R,S)-submodul N di M maka $\sqrt{(N:_R M)}MS \subseteq \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$.*

Bukti: Diketahui bahwa $\sqrt{(N:_R M)}$ sama dengan R atau merupakan irisan dari semua ideal prima di R yang memuat $(N:_R M)$. Jika $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} = M$, maka karena $\sqrt{(N:_R M)} \subseteq R$ diperoleh $\sqrt{(N:_R M)}MS \subseteq RMS = M = \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$. Selanjutnya, jika $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} \neq M$, berarti bahwa $\sqrt[(R,S)_\beta]{N} = \bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P$. Diambil sebarang $P \in V_\beta^{jp}(N)$, maka P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M dengan $N \subseteq P$. Sehingga diperoleh $(P:_R M)$ merupakan ideal prima di R. Selanjutnya, karena $N \subseteq P$ maka diperoleh $(N:_R M) \subseteq (P:_R M)$. Karena $(P:_R M)$ merupakan ideal prima di R dan memuat $(N:_R M)$, maka diperoleh $\sqrt{(N:_R M)} \subseteq (P:_R M)$. Akibatnya, diperoleh $\sqrt{(N:_R M)}MS \subseteq (P:_R M)MS \subseteq P$. Karena pengambilan (R,S)-submodul prima-β $P \in V_\beta^{jp}(N)$ sebarang, maka diperoleh $\sqrt{(N:_R M)}MS \subseteq \bigcap_{P\in V_\beta^{jp}(N)} P = \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$. Dengan demikian, pada kedua kasus terbukti bahwa $\sqrt{(N:_R M)}MS \subseteq \sqrt[(R,S)_\beta]{N}$. □

III. RADIKAL PRIMA-β GABUNGAN PADA (R,S)-MODUL

Sebelumnya telah disajikan bahwa (R,S)-submodul prima-β gabungan merupakan perumuman dari (R,S)-submodul prima gabungan. Dengan demikian, radikal prima-β gabungan dapat dipandang sebagai perumuman dari radikal prima gabungan pada [5]. Pada bagian ini akan disajikan definisi dari radikal prima-β gabungan pada (R,S)-modul dan beberapa sifat-sifatnya.

Berikut disajikan definisi dari radikal prima-β gabungan.

Definisi 1 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan di M maka didefinisikan radikal prima-β gabungan dari M adalah $rad_{(R,S)_\beta}(M) \coloneqq \sqrt[(R,S)_\beta]{0} \coloneqq \bigcap_{P\in Spec_\beta^{jp}(M)} P$. Namun, jika tidak terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan di M maka didefinisikan radikal prima-β gabungan dari M adalah $rad_{(R,S)_\beta}(M) \coloneqq M$.*

Contoh 1 Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-modul. Dapat ditunjukkan bahwa submodul $\{0\}$ merupakan $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-submodul prima-$\beta$ gabungan di $\mathbb{Z}$. Oleh karena setiiap $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-submodul prima-$\beta$ di $\mathbb{Z}$ memuat submodul $\{0\}$, maka radikal prima-β gabungan dari $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$-modul $\mathbb{Z}$ adalah $rad_{(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}) = \{0\}$.

Sebelum ke sifat pertama dari radikal prima-β gabungan, berikut diberikan suatu sifat yang akan digunakan dalam pembuktian sifat selanjutnya.

Proposisi 1 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R, S)-submodul N di M. Jika P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M, maka $N \cap P$ merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di N.*

Bukti: Diambil sebarang ideal I di R dan (R, S)-submodul L di N dengan $ILS \subseteq N \cap P$. Dari sini diperoleh bahwa $ILS \subseteq P$. Karena L merupakan (R, S)-submodul di N, maka L juga merupakan (R, S)-submodul di M. Akibatnya, karena P merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M, maka dari $ILS \subseteq P$ diperoleh $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(L) \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $\beta(I)MS \subseteq P$ atau $\beta(L) \subseteq P$. Karena N merupakan (R, S)-submodul di M, maka diperoleh $\beta(I)NS \subseteq \beta(I)MS \subseteq P$ dan $\beta(I)NS \subseteq N$. Dari sini, diperoleh $\beta(I)NS \subseteq N \cap P$, sehingga $\beta(I) \subseteq (N \cap P:_R N)$. Selanjutnya, karena L merupakan (R, S)-submodul di N, maka diperoleh $\beta(L) \subseteq N$. Akibatnya, diperoleh $\beta(L) \subseteq N \cap P$. Dengan demikian, dari $ILS \subseteq N \cap P$ berakibat $\beta(I) \subseteq (N \cap P:_R N)$ atau $\beta(L) \subseteq N \cap P$. Jadi terbukti bahwa $N \cap P$ merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di N. □

Proposisi 2 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika N merupakan (R, S)-submodul di M, maka $rad_{(R,S)_\beta}(N) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(M)$.*

Bukti: Diambil sebarang (R, S)-submodul prima-β gabungan $P \in Spec_\beta^{jp}(M)$. Jika $N \subseteq P$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(N) \subseteq P$. Jika $N \nsubseteq P$, maka berdasarkan Proposisi 1, diperoleh bahwa $N \cap P$ merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di N. Akibatnya diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(N) \subseteq N \cap P \subseteq P$. Dengan demikian, dalam kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(N) \subseteq P$. Karena pengambilan $P \in Spec_\beta^{jp}(M)$ sebarang, maka terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(N) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(M)$. □

Proposisi 3 *Diberikan (R, S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$, yakni M merupakan hasil tambah langsung dari (R, S)-submodul N_i di M untuk setiap $i \in I$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(M) = \bigoplus_{i \in I} rad_{(R,S)_\beta}(N_i)$.*

Bukti: Karena N_i merupakan (R, S)-submodul di M untuk setiap $i \in I$, maka $rad_{(R,S)_\beta}(N_i) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(M)$, untuk setiap $i \in I$. Jadi diperoleh $\bigoplus_{i \in I} rad_{(R,S)_\beta}(N_i) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Selanjutnya, diambil sebarang $m \in M$, maka $m = \sum_{i \in I} m_i$ dengan $m_i \in N_i$ untuk setiap $i \in I$ dan $m_i = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Misalkan $m \notin \bigoplus_{i \in I} rad_{(R,S)_\beta}(N_i)$, akan ditunjukkan bahwa $m \notin rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Karena $m \notin \bigoplus_{i \in I} rad_{(R,S)_\beta}(N_i)$, maka terdapat $k \in I$ sehingga $m_k \notin rad_{(R,S)_\beta}(N_k)$. Berarti terdapat (R, S)-submodul prima-β gabungan N_k^* di N_k sehingga $m_k \notin N_k^*$. Dibentuk $K = N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \neq k} N_i)$. Pertama, akan dibuktikan bahwa K merupakan (R, S)-submodul prima-β gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan $a \in M$ dengan $IaS \subseteq K$. Karena $a \in M$, maka diperoleh $a = \sum_{i \in I} a_i$ dengan $a_i \in N_i$ untuk setiap

$i \in I$ dan $a_i = 0$ kecuali untuk berhingga banyak indeks I. Berarti diperoleh $IaS = I(\sum_{i\in I} a_i)S = Ia_kS + I(\sum_{i\neq k} a_i)S \subseteq K$, sehingga $Ia_kS \subseteq N_k^*$. Karena N_k^* merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di N_k, maka $a_k + a_k \subseteq N_k^*$ atau $(I+I)N_kS \subseteq N_k^*$. Selanjutnya, karena $a_i \in N_i$ untuk setiap $i \in I$ maka diperoleh $\sum_{i\neq k} a_i + \sum_{i\neq k} a_i \in \bigoplus_{i\neq k} N_i$. Karena untuk setiap $i \in I$ diketahui bahwa N_i merupkan (R,S)-submodul di M, maka diperoleh $(I+I)(\bigoplus_{i\neq k} N_i)S \subseteq \bigoplus_{i\neq k} N_i$. Dengan demikian, diperoleh $a + a = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} a_i \in K$ atau $(I+I)(\bigoplus_{i\in I} N_i)S = (I+I)MS \subseteq K$. Jadi, terbukti bahwa K merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Selanjutnya, karena $m_k \notin N_k^*$ maka $m \notin K$. Karena K merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, maka $m \notin rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Jadi diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(M) \subseteq \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\beta}(N_i)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(M) = \bigoplus_{i\in I} rad_{(R,S)_\beta}(N_i)$. □

Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati X di M disebut (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal apabila X minimal di dalam himpunan semua (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, yaitu tidak terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan lain di M yang termuat di dalam X. Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa setiap (R,S)-submodul prima-β gabungan memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal di M. Dengan menggunakan sifat ini, diperoleh bahwa radikal prima-β gabungan sama dengan M atau merupakan irisan dari semua (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal di M.

Proposisi 4 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Radikal prima-β gabungan dari M adalah M atau merupakan irisan dari semua (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal di M.*

Bukti: Misalkan $rad_{(R,S)_\beta}(M) \neq M$, maka M memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan sehingga diperoleh $Spec_\beta^{jp}(M) \neq \emptyset$. Karena setiap (R,S)-submodul prima-β gabungan di M memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal, maka untuk setiap $P \in Spec_\beta^{jp}(M)$ terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal $P' \in Spec_\beta^{jp}(M)$ sedemikian sehingga memenuhi $P' \in P$. Selanjutnya, dibentuk himpunan

$$\wp = \left\{P' \subseteq P \mid P'\ (R,S) - \text{submodul prima} - \beta \text{ gabungan minimal} \ \&\ P \in Spec_\beta^{jp}(M)\right\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(M) = \bigcap_{P'\in\wp} P'$. Karena $\wp \subseteq Spec_\beta^{jp}(M)$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(M) \subseteq \bigcap_{P'\in\wp} P'$. Sebaliknya, diambil sebarang $a \notin rad_{(R,S)_\beta}(M)$, maka terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan $P \in Spec_\beta^{jp}(M)$ sehingga memenuhi $a \notin P$. Karena $P' \subseteq P$ untuk suatu (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal $P' \in \wp$, maka diperoleh $a \notin P'$. Akibatnya, diperoleh $a \notin \bigcap_{P'\in\wp} P'$ sehingga terbukti bahwa $\bigcap_{P'\in\wp} P' \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(M)$ merupakan irisan dari semua (R,S)-submodul prima-β gabungan minimal di M. □

Proposisi 5 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul prima-β gabungan P_1 dan P_2 di M. Jika*

$P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ dan $P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ merupakan (R,S)-submodul di $M/rad_{(R,S)_\beta}(M)$, maka berlaku $P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M) \cap P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M) = (P_1 \cap P_2)/rad_{(R,S)_\beta}(M)$.

Bukti: Diambil sebarang $\bar{a} \in (P_1 \cap P_2)/rad_{(R,S)_\beta}(M)$, maka $\bar{a} = a + rad_{(R,S)_\beta}(M)$ dengan $a \in P_1 \cap P_2$. Berarti $a \in P_1$ dan $a \in P_2$, sehingga diperoleh $\bar{a} \in P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ dan $\bar{a} \in P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $\bar{a} \in P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M) \cap P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Jadi, terbukti bahwa $(P_1 \cap P_2)/rad_{(R,S)_\beta}(M) \subseteq P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M) \cap P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Selanjutnya, diambil sebarang $\bar{b} \in P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M) \cap P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Berarti diperoleh $\bar{b} \in P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ dan $\bar{b} \in P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Dengan demikian, diperoleh $\bar{b} = p_1 + rad_{(R,S)_\beta}(M)$ dan $\bar{b} = p_2 + rad_{(R,S)_\beta}(M)$, untuk suatu $p_1 \in P_1$ dan $p_2 \in P_2$. Akibatnya, diperoleh $\bar{b} = p_1 + rad_{(R,S)_\beta}(M) = p_2 + rad_{(R,S)_\beta}(M)$, sehingga $p_1 - p_2 \in rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Berarti terdapat $k \in rad_{(R,S)_\beta}(M)$ sehingga memenuhi $p_1 - p_2 = k$. Dengan demikian, diperoleh $p_1 = p_2 + k \in P_2$ dan $p_2 = p_1 + k \in P_1$. Jadi, diperoleh $\bar{b} \in (P_1 \cap P_2)/rad_{(R,S)_\beta}(M)$, sehingga terbukti bahwa $P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M) \cap P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M) \subseteq (P_1 \cap P_2)/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $P_1/rad_{(R,S)_\beta}(M) \cap P_2/rad_{(R,S)_\beta}(M) = (P_1 \cap P_2)/rad_{(R,S)_\beta}(M)$. □

Apabila diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul P dan A di M dengan $A \subset P$, maka P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M jika dan hanya jika P/A merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M/A. Dengan menggunakan sifat ini, berikut ditunjukkan bahwa radikal prima-β gabungan dari (R,S)-bimodul $M/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ adalah nol.

Proposisi 6 *Jika diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}\left(M/rad_{(R,S)_\beta}(M)\right) = \bar{0}$.*

Bukti: Misalkan M tidak memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan, berarti diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(M) = M$. Dari sini, diperoleh (R,S)-modul faktor $M/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ tidak memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan, sehingga diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}\left(M/rad_{(R,S)_\beta}(M)\right) = M/rad_{(R,S)_\beta}(M) = M/M = \bar{0}$. Selanjutnya, misalkan M memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan. Diperoleh bahwa (R,S)-modul faktor $M/rad_{(R,S)_\beta}(M)$ juga memuat (R,S)-

submodul prima-β gabungan. Akibatnya, diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}\left(M/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)}\right) = \bigcap_{\bar{P}\in Spec_\beta^{jp}\left(M/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)}\right)} \bar{P}$. Berdasarkan Proposisi 5 diperoleh

$$\begin{aligned} rad_{(R,S)_\beta}\left(M/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)}\right) &= \bigcap_{\bar{P}\in Spec_\beta^{jp}\left(M/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)}\right)} \bar{P} \\ &= \left(\bigcap_{P\in Spec_\beta^{jp}(M)} P\right)/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)} \\ &= {rad_{(R,S)_\beta}(M)}/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)} \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}\left(M/_{rad_{(R,S)_\beta}(M)}\right) = \bar{0}$. □

Diberikan (R,S)-modul M dan ideal I di R sedemikian sehingga $I \subseteq (0:_R M)$. Berdasarkan [9], diketahui bahwa suatu (R,S)-modul M juga merupakan $(R/I,S)$-modul dengan operasi pergandaan skalar $\bar{a}\cdot m\cdot s = ams$ untuk setiap $\bar{a}\in R/I$, $m\in M$, dan $s\in S$. Dengan menggunakan sifat ini, berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul membentuk (R,S)-submodul prima-β gabungan.

Proposisi 7 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a\in M$ memenuhi $a\in RaS$, dan ideal I di R dengan $I\subseteq (0:_R M)$. Submodul P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M jika dan hanya jika P merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan di M.*

Bukti: ($\Rightarrow$) Diambil sebarang ideal $\bar{J} = J/I \in R/I$ dan $(R/I,S)$-submodul N di M dengan $\bar{J}NS\subseteq P$. Karena M dapat dipandang sebagai $(R/I,S)$-modul, maka diperoleh $\bar{J}NS = J/I(N)S = JNS\subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M, maka berakibat $N+N\subseteq P$ atau $(J+J)MS\subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $(\bar{J}+\bar{J})MS = (J+J)MS\subseteq P$ atau $N+N\subseteq P$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan di M.

($\Leftarrow$) Diambil sebarang ideal J di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $JNS\subseteq P$. Karena M dapat dipandang sebagai $(R/I,S)$-modul, maka diperoleh $JNS = \big((J+I)/I\big)NS\subseteq P$. Karena diketahui P merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan di M, maka berakibat $\big((J+I)/I + (J+I)/I\big)MS\subseteq P$ atau $N+N\subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $(J+J)MS\subseteq P$ atau $N+N\subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. □

Proposisi 8 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a\in M$ memenuhi $a\in RaS$. Jika I merupakan ideal di R dengan sifat $I\subseteq (0:_R M)$, maka diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(M) = rad_{(R/I,S)_\beta}(M)$.*

Bukti: Misalkan $rad_{(R,S)_\beta}(M) = M$, berarti M tidak memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan. Akibatnya, berdasarkan Proposisi 7 diperoleh bahwa M juga tidak memuat $(R/I,S)$-

submodul prima-β gabungan. Dengan demikian, diperoleh $rad_{(R/I,S)_\beta}(M) = M$ sehingga terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(M) = rad_{(R/I,S)_\beta}(M)$. Selanjutnya, misalkan $rad_{(R,S)_\beta}(M) \neq M$, berarti M memuat (R,S)-submodul prima-β gabungan. Akibatnya, berdasarkan Proposisi 7 diperoleh bahwa M juga memuat $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan. Diambil sebarang $a \in rad_{(R,S)_\beta}(M)$ dan (R,S)-submodul prima-β gabungan P di M, maka diperoleh $a \in P$. Berdasarkan Proposisi 7, diperoleh bahwa P juga merupakan $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan di M. Oleh karena itu, karena pengambilan (R,S)-submodul prima-β gabungan P di M sebarang, maka diperoleh $a \in rad_{(R/I,S)_\beta}(M)$. Jadi terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(M) \subseteq rad_{(R/I,S)_\beta}(M)$. Selanjutnya, diambil sebarang $b \in rad_{(R/I,S)_\beta}(M)$ dan $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan N di M, maka diperoleh $b \in N$. Berdasarkan Proposisi 7, diketahui bahwa N juga merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di M. Oleh karena pengambilan $(R/I,S)$-submodul prima-β gabungan N di M sebarang, maka diperoleh $b \in rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Jadi, terbukti bahwa $rad_{(R/I,S)_\beta}(M) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(M) = rad_{(R/I,S)_\beta}(M)$. □

Pada struktur (R,S)-modul tidak ada operasi perkalian antar submodulnya. Seperti halnya pada modul, perkalian antar submodul dapat dilakukan jika M merupakan modul perkalian. Menurut [10], suatu modul M disebut modul perkalian jika dan hanya jika $N = (N:_R M)M$ untuk setiap submodul N di M. Definisi ini telah dibawa ke struktur (R,S)-modul oleh [7]. Suatu (R,S)-modul M disebut modul perkalian kiri jika setiap (R,S)-submodul N di M dapat dinyatakan dengan $N = (N:_R M)NS$. Kemudian, merujuk pada [11] diketahui bahwa apabila diberikan submodul N dan K di M, maka didefinisikan perkalian dari submodul N dan K di dalam R-modul perkalian M adalah himpunan $NK = (N:_R M)(K:_R M)M$. Perkalian antar submodul pada modul perkalian ini juga telah dibawa ke struktur (R,S)-modul pada [7]. Apabila diberikan (R,S)-submodul N dan K di (R,S)-modul perkalian kiri M, maka didefinisikan $NK = (N:_R M)(K:_R M)MS$.

Keprimaan pada suatu (R,S)-modul dapat dikerjakan pada suatu (R,S)-modul perkalian kiri. Apabila diberikan (R,S)-modul perkalian kiri M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap elemen $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka suatu (R,S)-submodul sejati P di M merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan jika dan hanya jika untuk setiap (R,S)-submodul U dan V di M dengan sifat $UV \subseteq P$ maka berakibat $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$. Selanjutnya, berikut diberikan sifat terakhir tentang radikal prima-β gabungan pada suatu (R,S)-modul perkalian kiri.

Proposisi 9 *Diberikan (R,S)-modul perkalian kiri M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika K dan L merupakan (R,S)-submodul di M, maka berlaku $rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L) = rad_{(R,S)_\beta}(K) \cap rad_{(R,S)_\beta}(L)$.*

Bukti: Karena $K \cap L$ merupakan (R,S)-submodul di M, maka $K \cap L$ juga merupakan (R,S)-submodul di K dan di L. Akibatnya, diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(K)$ dan $rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(L)$. Dari sini diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(K) \cap rad_{(R,S)_\beta}(L)$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L)$. Berarti terdapat (R,S)-submodul prima-β gabungan N di $K \cap L$ sedemikian sehingga $a \notin N$. Oleh karena M merupakan (R,S)-modul perkalian kiri, maka diperoleh bahwa untuk setiap (R,S)-submodul U dan V di $K \cap L$ dengan $UV \subseteq N$, maka berakibat $U \subseteq N$ atau $V \subseteq N$. Karena U dan V merupakan (R,S)-submodul di $K \cap L$ maka U dan V juga merupakan (R,S)-submodul di K

dan di L. Dengan demikian, diperoleh N merupakan (R,S)-submodul prima-β gabungan di K dan L. Akibatnya, diperoleh $a \notin rad_{(R,S)_\beta}(K)$ dan $a \notin rad_{(R,S)_\beta}(L)$, sehingga $a \notin rad_{(R,S)_\beta}(K) \cap rad_{(R,S)_\beta}(L)$. Dengan demikian, diperoleh $rad_{(R,S)_\beta}(K) \cap rad_{(R,S)_\beta}(L) \subseteq rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rad_{(R,S)_\beta}(K \cap L) = rad_{(R,S)_\beta}(K) \cap rad_{(R,S)_\beta}(L)$. □

IV. KESIMPULAN

Submodul prima telah mengalami perumuman menjadi submodul prima-β. Definisi dan sifat-sifat submodul prima-β telah dikembangkan ke struktur (R,S)-modul menjadi submodul prima-β gabungan. Seperti halnya pada ring, pada (R,S)-modul definisi keprimaan juga dibawa hingga ke radikalnya melalui himpunan tertutup multiplikatifnya. Pada penelitian ini telah didefinisikan himpunan tertutup multiplikatif dari suatu (R,S)-modul relatif terhadap submodul prima-β gabungan, yang selanjutnya disebut dengan himpunan sistem-m_β. Berdasarkan penelitian ini, diperoleh bahwa himpunan sistem-m_β ini merupakan komplemen dari suatu (R,S)-submodul prima-β gabungan. Selain itu, radikal prima-β gabungan suatu (R,S)-modul M, dinotasikan dengan $rad_{(R,S)_\beta}(M)$, didefinisikan sebagai M atau irisan dari semua (R,S)-submodul prima-β gabungan pada (R,S)-modul. Telah ditunjukkan pula hubungan antara himpunan sistem-m_β dengan radikal prima-β gabungan dan beberapa sifat-sifatnya. Pada akhir penelitian ini, ditunjukkan bahwa, pada (R,S)-modul perkalian kiri, radikal prima-β gabungan dari irisan dua (R,S)-submodul di M sama dengan irisan dua radikal prima-β gabungan dari masing-masing (R,S)-submodulnya. Lebih lanjut, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi jembatan bagi penelitian berikutnya yang akan memperumum keprimaan di dalam (R,S)-modul beserta bentuk dualnya.

REFERENSI

[1] T. Khumprapussorn, “On α-Prime and Weakly α-Prime Submodules,” *Eur. J. Pure Appl. Math.*, vol. 11, no. 3, pp. 293–306, 2018.

[2] T. Khumprapussorn, “ON β-PRIME SUBMODULES,” *J. Indones. Math. Soc.*, vol. 25, no. 128–138, 2019.

[3] D. A. Yuwaningsih, Rusmining, and P. W. Prasetyo, “BEBERAPA SIFAT (R,S)-SUBMODUL PRIMA-α GABUNGAN,” *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 4, no. 2, pp. 167–179, 2021.

[4] D. A. Yuwaningsih and Rusmining, “Radikal Prima-α Gabungan pada (R, S)-Modul,” *J. Mat. Integr.*, vol. 17, no. 2, pp. 85–97, 2021.

[5] D. A. Yuwaningsih and I. E. Wijayanti, “On Jointly Prime Radicals of (R,S)-Modules,” *J. Indones. Math. Soc.*, vol. 21, no. 1, pp. 25–34, 2015, doi: 10.22342/jims.21.1.199.25-34.

[6] M. Behboodi, “On the prime radical and Baer’s lower nilradical of modules,” *Acta Math. Hungarica*, vol. 122, no. 3, pp. 293–306, 2009, doi: 10.1007/s10474-008-8028-3.

[7] T. Khumprapussorn, S. Pianskool, and M. Hall, “(R , S) -Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules,” vol. 7, no. 33, pp. 1631–1643, 2012.

[8] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*. USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[9] W. A. Adkins, *Algebra “An Approach via Module Theory.”* USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1992.

[10] Z. El-Bast and P. F. Smith, “Multiplication modules,” *Commun. Algebr.*, vol. 16, no. 4, pp. 755–779, 1988.

[11] R. Ameri, “On the prime submodules of multiplication modules,” *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 27, no. (2003), pp. 1715–1724, 2003.