JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

DIAMETER DAN GIRTH GRAF NILPOTEN RING MATRIKS (DIAMETER AND GIRTH OF NILPOTENT GRAPH ON A RING OF MATRICES)

RA Wahyu Fibriyanti[1], IE Wijayanti[2]

[1,2] *Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada*
Email: [1]regita.agustin@mail.ugm.ac.id, [2]ind_wijayanti@ugm.ac.id
*Penulis Korespondensi

Abstract. Let G be a simple graph. Diameter of G is the maximum distance for any two vertices u, v in connected graph G. *Girth* of G is the length of the shortest cycle contained in G. Let R be a ring with unity. $N(R)$ is the set of all nilpotent element of R. $Z_N(R)$ is the set of all x in R with xy is a nilpotent of R, for y in R^*. The nilpotent graph, $\Gamma_N(R)$, is a graph with vertex set $Z_N(R)^*$, two distinct vertices x and y are adjacent if only if xy is a nilpotent of R. On this research, we give some characteristics of diameter and *girth* nilpotent graph on matrix ring over field F. Given field F, diameter of $(\Gamma_N(M_n(F)))$ is 2, for $n \geq 3$ and diameter of $(\Gamma_N(M_2(F)))$ is 3. Moreover for field F and $n \geq 2$, then girth of $(\Gamma_N(M_n(F)))$ is 3.
Keywords: nilpotent graph, matrix, diameter, girth.
Abstrak. Diberikan suatu graf sederhana G. Diameter graf G merupakan jarak terbesar sebarang dua titik u, v di G. *Girth* graf G adalah panjang sikel terpendek di graf G. Misalkan R suatu ring dengan elemen satuan. $N(R)$ merupakan himpunan nilpoten di R. $Z_N(R)$ merupakan himpunan semua x di R dengan xy nilpoten pada R, untuk y di R^*. Graf nilpoten, $\Gamma_N(R)$, merupakan graf dengan himpunan titiknya adalah $Z_N(R)^*$, dan dua titik yang berbeda x, y bertetangga jika dan hanya jika xy nilpoten di R. Pada tulisan ini diberikan beberapa karakterisasi terkait diameter dan *girth* graf nilpoten pada ring matriks atas lapangan F. Diberikan lapangan F, diameter graf $(\Gamma_N(M_n(F)))$ adalah 2, untuk $n \geq 3$ dan diameter graf $(\Gamma_N(M_2(F)))$ adalah 3. Serta jika F suatu lapangan dan $n \geq 2$, maka girth graf $(\Gamma_N(M_n(F)))$ adalah 3.
Kata Kunci: graf nilpoten, matriks, diameter, girth.

I. PENDAHULUAN

Dalam beberapa tahun terakhir, teori graf telah menjadi alat matematika yang penting dalam berbagai subjek. Dalam matematika studi tentang struktur aljabar menggunakan sifat-sifat pada graf telah menjadi sebuah topik penelitian yang menarik dalam duapuluh tahun terakhir. Teori graf yang berasosiasi dengan ring pertama kali diperkenalkan oleh Beck [5].

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$. Suatu lintasan dari x ke y merupakan suatu barisan titik-titik yang bertetangga $x \sim x_1 \sim x_2 \sim \ldots \sim x_n \sim y$. Namun terdapat pengecualian yaitu jika terdapat lintasan yang mempunyai titik awal dan akhir yang sama maka lintasan tersebut disebut sikel (*cycle*). Suatu n-sikel merupakan suatu sikel dengan n titik, dengan $n \geq 3$. Jarak antara x dan y, dinotasikan dengan $d(x, y)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik x dan y di G, dengan $x \neq y$. Jika G graf terhubung, maka diameter dari graf G didefinisikan sebagai $diam(G) = maks\,\{d(x, y)|x, y \in V(G)\}$. Namun, jika G

graf tidak terhubung, maka $diam(G) = \infty$.*Girth* graf G, dinotasikan dengan $gr(G)$, adalah panjang sikel terpendek di graf G. Jika graf G tidak memiliki sikel, maka $gr(G) = \infty$.

Himpunan pembagi nol di R dinotasikan $Z(R)$ dan $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$. Diperhatikan bahwa $R^* = R \setminus \{0\}$. $N(R)$ adalah himpunan semua elemen nilpoten pada R. Graf pembagi nol pada suatu ring komutatif R dengan elemen satuan, dinotasikan $\Gamma(R)$, adalah suatu graf dengan himpunan titik $Z(R)^*$. Graf pembagi nol telah dikaji oleh beberapa peneliti [1] - [4]. Dalam [7], Chen mendefinisikan suatu jenis struktur graf atas ring komutatif dengan semua elemen ring R menjadi titik pada graf dan dua titik x dan y bertetangga jika $xy \in N(R)$. Himpunan $Z_N(R)$ merupakan himpunan semua $x \in R$ dengan xy nilpoten untuk suatu y tak nol di R^* dan $Z_N(R)^* = Z_N(R) \setminus \{0\}$. Graf nilpoten pada ring komutatif berhingga R, dinotasikan $\Gamma_N(R)$, adalah graf dengan himpunan titiknya $Z_N(R)^*$. Dua titik x dan y bertetangga jika xy nilpoten. Graf nilpoten pertama kali diperkenalkan pada [8]. Dalam [9], Nikmehr dan Khojasteh mengkaji beberapa sifat graf nilpoten pada ring matriks atas lapangan berhingga F, seperti diameter dan *girth*. Dalam tulisan ini, akan dibahas graf nilpoten ring matriks atas lapangan F, terkhusus pada diameter serta *girth* graf tersebut yang mengacu pada penelitian Nikmehr dan Khojasteh. Serta diberikan contoh terkait diameter dann girth graf nilpoten atas ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$, diameter graf nilpoten atas ring bilangan rasional $\mathbb{Q}$, dan definisi keterhubungan graf nilpoten atas ring yang isomorfis dengan kartesian beberapa himpunan.

Untuk suatu ring R, secara berturut-turut $M_n(R), R^n, I$ menotasikan ring matriks berukuran $n \times n$ atas R, himpunan matriks $n \times 1$, dan matriks identitas. E_{ij} menotasikan matriks dengan entri ke-(i, j) adalah 1 dan 0 untuk entri lainnya dengan i dan j, $1 \leq i, j \leq n$. Pada keseluruhan tulisan ini, graf yang digunakan adalah graf sederhana dan ring R adalah suatu ring dengan elemen satuan.

II. HASIL PENELITIAN

Pada bagian ini diberikan terlebih dahulu definisi dan sifat-sifat matriks nilpoten yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 1 *[6] Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan nilpoten jika $A^k = O$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$, dengan O adalah matriks nol berukuran $n \times n$.*

Berikut diberikan lema terkait beberapa sifat matriks nilpoten.

Lemma 1 *[6] Untuk sebarang matriks A berukuran $n \times n$ dipenuhi sifat-sifat berikut:*

(i) Matriks A merupakan matriks nilpoten jika dan hanya jika semua nilai eigen A bernilai nol.

(ii) Jika A matriks nilpoten maka A non-invertible.

(iii) Trace matriks nilpoten selalu bernilai nol, $tr(A) = 0$.

Berdasarkan Lemma 1 dapat dikhususkan bentuk matriks nilpoten berukuran 2×2 sebagai berikut :

Proposisi 1 *[10] Untuk setiap $A \in M_2(F)$, A nilpoten jika dan hanya jika*

$$A = \begin{bmatrix} x & a \\ b & -x \end{bmatrix};$$

dengan $a, b, x \in F, ab = -x^2$.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh graf nilpoten.

Definisi 2 *[9] Diberikan suatu ring berhingga R dengan elemen identitas. Graf nilpoten R adalah suatu graf dengan himpunan titiknya adalah*

$$Z_N(R)^* = \{x \in R - \{0\} \, | xy \in N(R), \text{ untuk suatu } y \in R - \{0\}\}.$$

Dua titik yang berbeda x, y dikatakan bertetangga jika $xy \in N(R)$ (atau secara ekuivalen $yx \in N(R)$), yaitu himpunan nilpoten di R. Graf ini untuk selanjutnya dinotasikan dengan $\Gamma_N(R)$.

Berikut diberikan contoh graf nilpoten pada ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Contoh 1 Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}_2)$ dengan elemen-elemennya

$$M_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right\}.$$

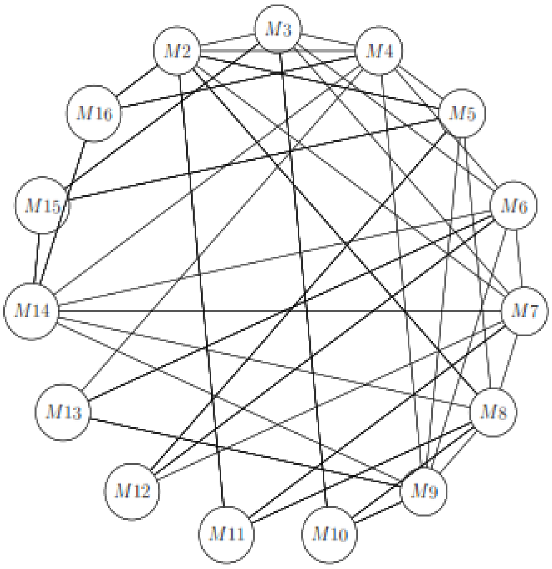
Himpunan titik-titik pada graf $\Gamma_N(M_2(\mathbb{Z}_2))$ adalah :

$$Z_N(M_2(\mathbb{Z}_2))^* = \left\{ \begin{array}{l} M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, \\ M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16} \end{array} \right\}$$

dan elemen nilpoten pada $M_2(\mathbb{Z}_2)$ adalah

$$N(M_2(\mathbb{Z}_2)) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Graf $\Gamma_N(M_2(\mathbb{Z}_2))$ diberikan pada gambar berikut :



Gambar 1. Graf $\Gamma_N(M_2(\mathbb{Z}_2))$

Berdasarkan graf $\Gamma_N(M_2(\mathbb{Z}_2))$ di atas, diameter graf $\Gamma_N(M_2(\mathbb{Z}_2))$ adalah 3 dan begitu juga dengan $gr(\Gamma_N(M_2(\mathbb{Z}_2))) = 3$

Selanjutnya akan ditunjukkan jika F suatu lapangan dan $n \geq 3$, maka $diam(\Gamma_N(M_n(F))) = 2$. Serta akan ditunjukkan jika diberikan suatu lapangan F, maka $diam(\Gamma_N(M_2(F))) = 3$. Namun, terlebih dahulu diberikan definisi terkait keterhubungan pada graf nilpoten ring matriks.

Definisi 3 *Diberikan ring matriks atas lapangan F, $M_n(F)$. Graf nilpoten $M_n(F)$, dinotasikan $\Gamma_N(M_n(F))$, adalah suatu graf dengan himpunan titiknya*

$$Z_N(M_n(F))^* = \{X \in M_n(F) - \{0\} \,|\exists Y \in M_n(F) - \{0\}, XY \in N(M_n(F))\}.$$

Dua titik yang berbeda X, Y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $XY \in N(M_n(F))$, atau secara ekuivalen,$YX \in N(M_n(F))$, dengan $N(M_n(F))$ merupakan himpunann nilpoten di $M_n(F)$.

Proposisi 2 *[9] Diberikan suatu lapangan F. Jika $R = M_n(F)$, dan $n \geqslant 2$, maka setiap elemen tak-nol di R merupakan suatu titik pada graf $\Gamma_N(R)$. Selanjutnya jika A merupakan suatu matriks non-singular, maka A bertetangga dengan $A^{-1}E_{1n}$ dan $A \in V(\Gamma_N(R))$. Serta jika A merupakan suatu matriks singular, maka $AY = 0$ untuk suatu $0 \neq Y \in R$. Oleh karena itu $A \in V(\Gamma_N(R))$.*

Bukti. Misalkan $A \in R$ mempunyai invers, terdapat $A^{-1} \in R$. Matriks dengan entri $(1, n)$ adalah 1 dan entri yang lain 0, dinotasikan E_{1n} dengan bentuk,

$$E_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dapat diperhatikan bahwa

$$A \cdot A^{-1}E_{1n} = (AA^{-1})E_{1n} = IE_{1n} = E_{1n} \in N(R),$$

berakibat $A \in V(\Gamma_N(R))$. Sebaliknya, jika A merupakan matriks singular, misalkan $AY = 0$, karena $Y \in M_n(F)$ sehingga dapat ditulis

$$A[Y_1|Y_2|...|Y_n] = 0,$$

dengan Y_i merupakan vektor-vektor kolom untuk $i = 1, 2, ..., n, n \geq 2$. Lebih lanjut diperoleh

$$[AY_1|AY_2|...|AY_n] = [0|0|...|0].$$

Dari persamaan dua matriks di atas diperoleh sistem persamaan linear homogen

$$\begin{aligned} AY_1 &= 0 \\ AY_2 &= 0 \\ &\vdots \\ AY_n &= 0. \end{aligned}$$

Telah diketahui bahwa suatu sistem persamaan linear homogen hanya mempunyai solusi trivial jika dan hanya jika matriks koefisiennya merupakan matriks invertible. Namun karena A merupakan matriks singular sehingga A tidak *invertible*, akibatnya terdapat solusi lain selain nol untuk sistem persamaan linear homogen di atas. Atau dengan kata lain terdapat $0 \neq Y_i \in R$ untuk $i = 1, 2, ..., n, n \geq 2$. □

Selanjutnya diberikan teorema tentang ukuran diameter graf nilpoten pada $M_n(F)$ dengan $n \geq 3$.

Teorema 1 *[9] Jika F suatu lapangan dan $n \geq 3$ maka $diam(\Gamma_N(M_n(F))) = 2$.*

Bukti. Misalkan $A, B \in M_n(F)$ dan $C = [0|X]$, dengan $X \in F^n$. Dapat dibentuk $AC = [0|AX]$ dan $BC = [0|BX]$. Selanjutnya, misalkan $W_1 = \{X \in F^n | A_nX = 0\}$ dan $W_2 = \{X \in F^n | B_nX = 0\}$, dengan A_n dan B_n merupakan baris-baris ke-n matriks A dan B, W_1 dan W_2 merupakan subruang dari F^n.
Lebih lanjut akan ditunjukkan bahwa $dim(W_i) \geq n - 1$, untuk $i = 1, 2$. Namun, dapat diketahui bahwa $dim(W_1) = nulitas(A_n)$ dan $dim(W_2) = nulitas(B_n)$. Dengan masing-masing $nulitas(A_n)$ adalah dimensi ruang solusi persamaan linear homogen $A_nX = 0$ dan

$nulitas(B_n)$ adalah dimensi ruang solusi persamaan linear homogen $B_nX = 0$. Berikut akan diberikan paparan untuk W_1 yang juga berlaku serupa untuk W_2.

- Jika vektor baris $A_n = (0, 0, \cdots, 0)$, maka dapat diperhatikan ruang baris (A_n),

$$\begin{aligned} Row(A_n) &= \{k \cdot A_n | k \in F\}, \\ &= \{k \cdot (0, 0, \cdots, 0) | k \in F\}, \\ &= \{(0, 0, \cdots, 0)\}. \end{aligned}$$

  Diperoleh $dim(Row(A_n)) = 0$, atau dengan kata lain rank$(A_n) = 0$ dan berakibat $nulitas(A_n) = n$.

- Jika vektor baris $A_n = (a_{n1}, \cdots, a_{nn})$, maka

$$\begin{aligned} Row(A_n) &= \{k \cdot A_n | k \in F\}, \\ &= \{k \cdot (a_{n1}, \cdots, a_{nn}) | k \in F\}. \end{aligned}$$

  Diperoleh $dim(Row(A_n))$ = rank$(A_n) = 1$ dan berakibat $nulitas(A_n) = n - 1$.

Dari kedua poin di atas, dapat disimpulkan bahwa $dim(W_1) \geq n-1$, dan paparan tersebut juga berlaku untuk menentukan $dim(W_2)$, dengan kata lain $dim(W_2) \geq n - 1$. Selanjutnya, karena $n \geq 3$, terdapat $0 \neq X_0 \in W_1 \cap W_2$. Misalkan $C = [0|X_0]$, jelas bahwa C bertetangga dengan A dan B. Sehingga $diam\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right) \leq 2$. Sebaliknya, E_{nn} dan I merupakan dua titik yang tidak bertetangga pada $\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right)$. Oleh karena itu diperoleh $diam\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right) = 2$. □

Teorema 2 *[9] Jika F suatu lapangan, maka $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) \leq 3$.*

Bukti. Misalkan diberikan $A, B \in M_2(F)$ dan X merupakan suatu matriks nilpoten pada $M_2(F)$. Terdapat beberapa kasus seperti di bawah ini :

1. Jika A dan B merupakan matriks-matriks *non-singular*, maka $A \sim XA^{-1} \sim B^{-1}X \sim B$ merupakan suatu lintasan (*path*).

2. Jika A adalah suatu matriks *non-singular* dan B adalah suatu matriks *singular*, maka $BY = 0$ untuk suatu $0 \neq Y$. Kemudian jika $YX = 0$, maka $A \sim XA^{-1} \sim Y \sim B$ adalah suatu lintasan. Sedangkan jika $YX \neq 0$, maka $A \sim XA^{-1} \sim YX \sim B$ juga suatu lintasan.

3. Diberikan A dan B merupakan matriks-matriks *singular*. Jika AB nilpoten, maka $A \sim B$ merupakan suatu lintasan. Sebaliknya, terdapat $X, Y \neq 0$ sedemikian sehingga $AX = 0$ dan $YB = 0$, sehingga $A \sim X \sim Y \sim B$ merupakan suatu lintasan, untuk $XY = 0$ dan juga $A \sim XY \sim B$ merupakan suatu lintasan untuk $XY \neq 0$.

Berdasarkan ketiga kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) \leq 3$. □

Berikut diberikan sebuah akibat berdasarkan Teorema 1 dan Teorema 2.

Akibat 1 *Jika F suatu lapangan dan n bilangan bulat positif, maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku :*

1. *jika $n \geq 3$, maka graf $\Gamma_N(M_n(F))$ terhubung,*
2. *jika $n = 2$, maka graf $\Gamma_N(M_n(F))$ terhubung.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 1 dan Teorema 2, diketahui bahwa graf $\Gamma_N(M_n(F))$ dengan $n \geq 3$ memiliki $diam = 2$ dan graf $\Gamma_N(M_n(F))$ dengan $n = 2$ memiliki $diam = 3$. Artinya, masing-masing pada graf tersebut selalu dapat ditemukan sebuah lintasan antara dua sebarang titik berbeda u, v dengan $u \neq v$. Sehingga berdasarkan definisi diameter graf secara umum, maka masing-masing graf tersebut merupakan graf terhubung. □

Lemma 2 *[9] Jika F adalah suatu lapangan dan terdapat $c \in F$ sedemikian sehingga c bukan suatu kuadrat, maka $diam(\Gamma_N(M_2(F))) = 3$.*

Bukti. Misalkan $c \in F$ sedemikian sehingga $c \neq q^2, \forall q \in F$ dan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix}$. Klaim bahwa $d(I, A) = 3$. Andaikan X bertetangga dengan I dan A. Karena X nilpoten, berdasarkan Sifat 1 diperoleh $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, untuk suatu $x, y, z \in F$.
Lebih lanjut, $XA = \begin{bmatrix} cy & x \\ -cx & z \end{bmatrix}$ juga nilpoten. Akibatnya diperoleh $cy = -z$ dan $cyz = -z^2$. Karena $det(X) = 0$, diperoleh $x^2 = -yz$. Hal tersebut berarti bahwa $cx^2 = z^2$. Jika $x = 0$, maka $yz = 0$ dan karena $cy = -z$, diperoleh $X = 0$, hal ini kontradiksi. Untuk $x \neq 0$ diperoleh $c = (zx^{-1})^2$, hal ini juga merupakan suatu kontradiksi. Berdasarkan Teorema 2, bukti lengkap. □

Dari lema di atas, dapat diketahui bahwa jika F lapangan dan terdapat $c \in F$ sedemikian sehingga c bukan kuadrat, maka untuk $A, B \in M_2(F)$ dapat dibentuk suatu lintasan dengan $d(A, B) \leq 3$.

Selanjutnya diberikan contoh terkait Teorema 2.
Dalam contoh ini diberikan gambaran bagaimana dua matriks tidak bertetangga dihubungkan oleh suatu lintasan dengan panjang maksimal 3.

Contoh 2 Berikut contoh pada lapangan bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

1. Diberikan A dan B matriks-matriks yang mempunyai invers, dan suatu matriks nilpoten $X \in M_2(\mathbb{Q})$ secara berturut-turut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

Lebih lanjut dapat diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A\left(XA^{-1}\right) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-28}{5} & \frac{22}{5} \\ \frac{-7}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-77}{5} & \frac{121}{10} \\ \frac{-98}{5} & \frac{77}{5} \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(XA^{-1}\right)\left(B^{-1}X\right) &= \begin{bmatrix} \frac{-28}{5} & \frac{22}{5} \\ \frac{-7}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -40 \\ \frac{1}{10} & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-269}{5} & \frac{1076}{5} \\ \frac{-269}{20} & \frac{269}{5} \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(B^{-1}X\right)B &= \begin{bmatrix} 10 & -40 \\ \frac{1}{10} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -40 \\ \frac{1}{10} & -2 \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right). \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh perkalian masing-masing $A\left(XA^{-1}\right)$, $\left(XA^{-1}\right)\left(B^{-1}X\right)$, dan $\left(B^{-1}X\right)B \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$. Sehingga A dan B yang tidak bertetangga dihubungkan oleh lintasan dengan panjang 3 yaitu $A \sim XA^{-1} \sim B^{-1}X \sim B$.

2. Diberikan A matriks yang mempunyai invers dan B matriks *singular* berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Terdapat $Y \neq 0$, $Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $BY = 0$.

Untuk $X = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right)$, diperoleh

$$YX = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Karena $YX \neq 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} A\left(XA^{-1}\right) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-28}{5} & \frac{22}{5} \\ \frac{-7}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-77}{5} & \frac{121}{10} \\ \frac{-98}{5} & \frac{77}{5} \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(XA^{-1}\right)YX &= \begin{bmatrix} \frac{-28}{5} & \frac{22}{5} \\ \frac{-7}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & -80 \\ 5 & -20 \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}YX(B) &= \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ -14 & -14 \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right).\end{aligned}$$

Dari hasil di atas disimpulkan bahwa A dan B yang tidak bertetangga dihubungkan oleh lintasan dengan panjang 3 yaitu $A \sim XA^{-1} \sim YX \sim B$.

3. Diberikan A dan B merupakan matriks-matriks *singular*,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right).$$

Terdapat matriks tak nol X, Y,

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

sedemikian sehingga $AX = 0$ dan $YB = 0$. Diperhatikan bahwa

$$XY = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Berdasarkan Teorema 2 diperoleh

$$\begin{aligned}A(XY) &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XY(B) &= \begin{bmatrix} -16 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N\left(M_2\left(\mathbb{Q}\right)\right). \end{aligned}$$

dengan kata lain A dan B yang tidak bertetangga dihubungkan oleh lintasan dengan panjang 2 yaitu $A \sim XY \sim B$.

Lemma 3 *[9] Misalkan F suatu lapangan berhingga. $|F|$ adalah suatu bilangan genap jika dan hanya jika setiap elemen F adalah kuadrat.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan $|F|$ adalah suatu bilangan genap. Dibentuk $f : F \to F, f(x) = x^2$. Berdasarkan definisi karakteristik F, diperoleh $char\,(F) = 2$. Lebih lanjut diperoleh

$$2 \cdot 1_F = 1_F + 1_F = 0,$$

Akibatnya $1_F = -1_F$. Untuk sebarang lapangan F, persamaan $x^2 = 1$ hanya mempunyai solusi yaitu $x = 1_F$. Akan ditunjukkan f injektif. Diambil sebarang $x, y \in F$, diperoleh $f(x) = x^2$ dan $f(y) = y^2$. Diperhatikan bahwa untuk

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 &= y^2 \\ x^2y^{-2} &= y^2y^{-2} \\ \left(xy^{-1}\right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa $\left(xy^{-1}\right)^2 = 1$ hanya mempunyai satu solusi yaitu $xy^{-1} = 1$,

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= 1 \\ xy^{-1}y &= 1y \\ x &= y, \end{aligned}$$

dengan kata lain f injektif. Karena F berhingga, sehingga f surjetktif. Artinya untuk setiap y, terdapat x sehingga $f(x) = y$. Dilain pihak diketahui $f(x) = x^2$, sehingga berlaku $y = x^2$. Akibatnya setiap elemen F kuadrat.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika setiap elemen F kuadrat, maka $|F|$ adalah suatu bilangan genap. Misal diberikan $f : F^* \to F^*, f(x) = x^2$. Diketahui setiap elemen F kuadrat, artinya untuk setiap $y \in F$ terdapat $x \in F$ sehingga $y = x^2$. Dilain pihak, $f(x) = x^2$, sehingga diperoleh $f(x) = y$. Dengan kata lain f surjektif. Lebih lanjut karena F berhingga, sehingga f injektif. Jika $|F^*|$ genap, terdapat suatu $a \in F^*$ sedemikian sehingga $|a| = 2$. Akibatnya $f(a) = a^2 = 1$, yang berarti $a = 1$ dan $|a| = 1$, hal ini kontradiksi dengan asumsi $|a| = 2$. Dengan kata lain diperoleh $|F^*|$ ganjil dan $|F|$ genap. □

Akibat 2 *[9] Jika F suatu lapangan berhingga dan $|F|$ adalah suatu bilangan ganjil, maka $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 3 dapat diketahui bahwa $|F|$ ganjil jika dan hanya jika terdapat $c \in$

F sedemikian sehingga c bukan kuadrat. Kemudian berdasarkan Lemma 2, jika F lapangan dan terdapat $c \in F$ sedemikian sehingga c bukan kuadrat, maka $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$. Sehingga benar bahwa jika $|F|$ adalah suatu bilangan ganjil, maka $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$. $\square$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)\right) = 3$ ketika $|F|$ genap. Namun sebelum itu, dibutuhkan beberapa lema sebagai berikut.

Lemma 4 *[9]* $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)\right) = 3$.

Bukti. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Jelas bahwwa AB bukan nilpoten. Kemudian klaim bahwa $d(A,B) = 3$. Andaikan $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ bertetangga dengan masing-masing A dan B.

Dengan kata lain $AX, XA, BX, XB \in Nil\left(M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)$. Sehingga matriks-matriks di bawah ini haruslah nilpoten dengan $AX = C, XA = G, BX = D, XB = E$:

$$C = \begin{bmatrix} z & w \\ x & y \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} y & x \\ w & z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} x & y \\ x+z & y+w \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} x+y & y \\ z+w & w \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat pada matriks-matriks nilpoten tersebut, diperoleh $xw = yz$. Lebih lanjut jika $x = 0$, maka $y = z = 0$. Di lain pihak karena D nilpoten, berakibat $w = 0$. Hal ini merupakan suatu kontradiksi. Selanjutnya misalkan $x \neq 0$. Karena C nilpoten, diperoleh $y = -z$. Tetapi D nilpoten, yang berrarti $D^2 = 0$ dan $x^2 + xy - y^2 = 0$ untuk suatu $0 \neq x, y \in \mathbb{Z}_2$. Hal ini suatu kontradiksi. Menurut Teorema 2, diperoleh $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)\right) = 3$. $\square$

Lemma 5 *[9] Jika F suatu lapangan dan $char(F) = 2$, maka $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$.*

Bukti. Jika $|F| = 2$, maka berdasarkan Lema 4 terbukti. Kemudian misalkan $|F| \geq 4$. Misalkan dibentuk himpunan $S = \{\alpha + \alpha^{-1} | \alpha \in F^*\}$. Selanjutnya diasumsikan $y \in F \backslash \left(S \cup \{0, 1\}\right)$. Kemudian misalkan $x = 1 + y$, dan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Klaim bahwa $d(A,B) = 3$. Menggunakan kontradiksi, misalkan A bertetangga dengan B yang berarti $d(A,B) = 1$, sehingga berakibat $det(AB) = det(A)det(B) = 0$, dan diperoleh $(1+x)^2 = 0$ serta $y = 0$. Hal ini kontradiksi dengan keanggotaan y.

Oleh karena itu $d(A,B) \geq 2$. Misalkan terdapat $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ yang bertetangga dengan A dan B.

Karena X bertetangga dengan A, $tr(AX) = 0$ dan diperoleh

$$a + c = b + dx.$$

Karena X juga bertetangga dengan B, berakibat $tr(BX) = 0$, serta diperoleh

$$ax + c = b + d.$$

Berdasarkan dua persamaan di atas diperoleh $a(1+x) = d(1+x)$. Diperhatikan bahwa $1+x = y \in F^*$, sehingga diperoleh $a = d$ dan berakibat $X = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b+ax & a \end{bmatrix}$.
Selanjutnya diperhatikan bahwaa $det(AX) = 0$ dan $det(A) \neq 0$, karenanya dapat disimpulkan bahwa $det(X) = 0$. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} \det(X) = a^2 - (b\,(a+b+ax)) &= 0, \\ a^2 - \left(ab + b^2 + abx\right) &= 0, \\ a^2 - ab - b^2 - abx &= 0, \\ a^2 - b^2 &= ab + abx, \\ a^2 + b^2 &= ab\,(1+x)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Berdasarkan Persamaan 1 di atas, jika $a = 0$ maka $b = 0$. Berakibat $X = 0$, yang kontradiksi dengan asumsi bahwa X bertetangga dengan A dan B. Kemudian jika $a \neq 0$, maka jelas $b \neq 0$, berakibat

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= ab\,(1+x)\,, \\ a^2 + b^2 &= ab\,(y)\,, \\ y &= \left(a^2 + b^2\right) a^{-1} b^{-1}, \\ y &= ab^{-1} + ba^{-1} \in S. \end{aligned}$$

Hal ini merupakan kontradiksi dengan sifat keanggotaan y. Oleh karena itu disimpulkan bahwa benar $d(A, B) = 3$. Berdasarkan Teorema 2 diperoleh diameter graf $\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)$ adalah 3. $\square$

Selanjutnya diberikan salah satu hasil utama dalam pembahasan ini.

Teorema 3 *[9] Jika F suatu lapangan, maka $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$.*

Bukti. Jika $|F|$ ganjil, maka berdasarkan Akibat 2, diperoleh $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$. Sebaliknya jika $char(F) = 2$, dan berdasarkan Lema 5 juga diperoleh $diam\left(\Gamma_N\left(M_2\left(F\right)\right)\right) = 3$. $\square$

Selanjutnya diberikan sebuah sifat baru jika ring matriks yang digunakan adalah ring matriks diagonal.

Lemma 6 *Jika $M_{n_d}\left(F\right)$ merupakan ring matriks diagonal, maka himpunan titik $Z_N(M_{n_d}\left(F\right))^*$ kosong.*

Bukti. Andaikan himpunan titik $Z_N(M_{n_d}\left(F\right))^*$ tidak kosong. Artinya, terdapat $X \in Z_N(M_{n_d}\left(F\right))^*$ dan $Y \in M_{n_d}\left(F\right) - \{0\}$, sehingga $XY \in N(M_{n_d}\left(F\right))$. Namun diketahui bahwa masing-masing X dan Y merupakan matriks diagoonal, dan hasil kali XY juga merupakan matriks diagonal. Diketahui bahwa matriks diagonal bukanlah elemen nilpoten. Hal ini kotradiksi, sehingga disimpulkan bahwa benar himpunan titik $Z_N(M_{n_d}\left(F\right))^*$ kosong. $\square$

Berdasarkan Lemma 6, dapat dikaji lebih khusus tentang ring matriks diagonal yang digunakan.

Teorema 4 *Jika $M_{n_d}(R)$ merupakan ring matriks diagonal atas ring komutatif R dengan entri diagonalnya adalah elemen nilpoten pada R dan $n_d \geq 2$, maka $diam\,(M_{n_d}(R)) = 1$.*

Bukti. Diketahui R merupakan sebarang ring komutatif. $M_{n_d}(R)$ merupakan ring matriks diagonal atas R dengan entri diagonalnya adalah elemen nilpoten pada R. Diambil sebarang $A, B \in M_{n_d}(R)$. Akan ditunjukkan A, B merupakan elemen nilpoten pada $M_{n_d}(R)$.
Diperhatikan bahwa $A \in M_{n_d}(R)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ii} \in N(R), i = 1, \ldots, n.$$

Karena $a_{ii} \in N(R)$ sehingga terdapat $k_i \in \mathbb{Z}^+$ sehingga ${a_{ii}}^{k_i} = 0$. Dipilih m yang merupakan KPK dari k_i. Sehingga diperoleh

$$A^m = 0, A \in N(M_{n_d}(R)).$$

Hal tersebut juga berlaku untuk menunjukkan bahwa $B \in N(M_{n_d}(R))$, sehingga untuk $n \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $B^n = 0$. Selanjutnya dipilih $k = min\,\{m, n\}$, sehingga berlaku

$$(AB)^k = A^k B^k = 0.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $AB \in N(M_{n_d}(R))$. Berdasarkan definisi keterhubungan sebelumnya, maka disimpulkan bahwa A bertetangga dengan B dan diperoleh $diam\,(M_{n_d}(R)) = 1$. □

Selanjutnya, sebelum pada pembahasan berikutnya akan diberikan contoh struktur nilpoten graf atas ring yang isomorfis dengan hasil kali kartesian dua himpunan.

Contoh 3 Diberikan ring $R \cong M_2(\mathbb{Z}_2) \times M_2(\mathbb{Z}_2)$. Misalkan diambil sebarang $(A, B) \in M_2(\mathbb{Z}_2) \times M_2(\mathbb{Z}_2)$, dapat diperhatikan bahwa (A, B) dikatakan nilpoten pada $M_2(\mathbb{Z}_2) \times M_2(\mathbb{Z}_2)$ jika terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga

$$(A, B)^n = 0 \Leftrightarrow A^n = 0, B^n = 0.$$

Selanjutnya diambil sebarang $(A, B), (C, D) \in M_2(\mathbb{Z}_2) \times M_2(\mathbb{Z}_2)$, lebih lanjut $(A, B), (C, D)$ bertetangga jika

$$(A, B) \cdot (C, D) = (AC, BD) \in N(M_2(\mathbb{Z}_2) \times M_2(\mathbb{Z}_2))$$

atau terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga

$$(AC, BD)^n = 0 \Leftrightarrow (AC)^n = 0, (BD)^n = 0.$$

Sebagai contoh diperhatikan kembali Contoh 1, diperhatikan bahwa (M_7, M_2) bertetangga dengan (M_8, M_3) karena

$$\begin{aligned}(M_7, M_2)\cdot(M_8, M_3) &= (M_7M_8, M_2M_3)\\ &= \left(\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right),\end{aligned}$$

dan $\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right) \in N\left(M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\times M_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)$ untuk suatu $n = 10$.

Contoh di atas merupakan gambaran untuk pembahasan pada lema berikut.

Lemma 7 *[9] Jika* $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i), F_1, \ldots, F_k$ *adalah lapangan - lapangan berhingga, dan* $n_i \geq 3$ *dengan* i*,* $1 \leq i \leq k$*, maka* $diam\left(\Gamma_N(R)\right) = 2$.

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $n_1 \geq 3$. Misalkan $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in R$. Jika $x_1 = y_1 = 0$, maka terbentuk lintasan $x \sim (1, 0, \ldots, 0) \sim y$. Kemudian sebaliknya jika $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$, maka berdasarkan Teorema 1, terdapat $0 \neq \alpha_1 \in M_{n_i}(F_i)$ sedemikian sehingga

$$x_1\alpha_1, y_1\alpha_1 \in Nil\left(M_{n_1}(F_1)\right).$$

Sehingga $x(\alpha_1, 0, \ldots, 0), y(\alpha_1, 0, \ldots, 0) \in Nil(R)$, yang mengakibatkan $d(x, y) \leq 2$. Selanjutnya jika $d(x_1, y_1) = 2$ dan $x_i = y_i = 0$, untuk $i \neq 1$, maka $d(x, y) = 2$, dengan kata lain terbukti $diam\left(\Gamma_N(R)\right) = 2$. □

Lemma 8 *[9] Jika* $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i), F_1, \ldots, F_k$ *adalah lapangan - lapangan berhingga, dan* $n_i \leq 2$ *untuk* $i = 1, ..., k$*, dan* $n_j = 2$ *dengan* j*,* $1 \leq j \leq k$ *maka* $diam\left(\Gamma_N(R)\right) = 3$.

Bukti. Akan dibuktikan dengan membagi dua kasus.

1. Kasus pertama jika $k = 1$, maka berdasarkan Teorema 3, diperoleh $diam\left(\Gamma_N(R)\right) = 3$,
2. Kasus kedua, diasumsikan $k \geq 2$. Pertama klaim bahwa $diam\left(\Gamma_N(R)\right) \leq 3$. Selanjutnya misalkan $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in V\left(\Gamma_N(R)\right)$. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $n_1 = 2$. Jika $x_1 = y_1 = 0$, maka x dan y bertetangga dengan $(1, 0, \ldots, 0)$. Jika $x_1, y_1 \neq 0$, maka berdasarkan Proposisi 2 dan Teorema 3, diperoleh $d(x_1, y_1) \leq 3$, dan juga $d(x, y) \leq 3$. Jika $x_1 = 0$ dan $y_1 \neq 0$, maka diperoleh $y_1a_1 \in N\left(M_2(F_1)\right)$, untuk suatu $0 \neq a_1 \in \left(M_2(F_1)\right)$. Dengan kata lain, x dan y bertetangga dengan $(a_1, 0, \ldots, 0)$ dan klaim terbukti bahwa $diam\left(\Gamma_N(R)\right) \leq 3$.
   Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $diam\left(\Gamma_N(R)\right) = 3$. Jika $n_1 = 1$, maka misalkan $0 \neq x_i, y_i \in \left(M_{n_i}(F_i)\right)$ sehingga $d(x_i, y_i) = 3$. Jika $n_i = 2$, maka terdapat $x_i, y_i \in$

$(M_{n_i}(F_i))$ sedemikan sehingga $d(x_i, y_i) = 3$. Kemudian misalkan $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$, mudah diketahui bahwa $d(x, y) = 3$.

□

Berdasarkan Lema 8 diperoleh diameter graf $\Gamma_N(M_2(F) \times M_2(F))$ adalah 3. Diketahui pula sebelumnya bahwa pada Teorema 3 diameter graf $\Gamma_N(M_2(F))$ adalah 3. Dapat diamati bahwa elemen nilpoten pada $M_2(F)$ berpengaruh pada penentuan elemen nilpoten $(M_2(F) \times M_2(F))$. Sehingga jarak sebarang dua titik u, v di $\Gamma_N(M_2(F))$ juga berpengaruh pada jarak sebarang dua titik u, v di $\Gamma_N(M_2(F) \times M_2(F))$. Dengan kata lain diameter graf $\Gamma_N(M_2(F))$ berpengaruh terhadap diameter graf $\Gamma_N(M_2(F) \times M_2(F))$.

Begitu pula terdapat hubungan antara $diam(\Gamma_N(M_n(F)))$ untuk $n \geq 3$ dan $diam(\Gamma_N(R))$ dengan $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i)$ untuk $n_i \geq 3$. Diperhatikan bahwa berdasarkan Teorema 1 dan Lema 7 diperoleh diameter masing-masing graf tersebut adalah 2.

Setelah diberikan beberapa karakterisasi diameter graf nilpoten , berikut dipaparkan beberapa karakterisasi *girth* graf nilpoten ring matriks.

Lemma 9 *[9] Jika* $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i), F_1, \ldots, F_k$ *adalah lapangan - lapangan berhingga,* $n_1, \ldots, n_k$ *adalah bilangan-bilangan bulat positif dan* $k \geq 3$*, maka* $gr(\Gamma_N(R)) = 3$.

Bukti. Misalkan e_i merupakan vektor $1 \times n$ dengan komponen ke$-i$ adalah I dan komponen lainnya adalah 0. Karena $k \geq 3$, sehingga dapat dibentuk $3-$sikel pada $(\Gamma_N(R))$ yaitu $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_1$. Diperhatikan bahwa :

- $e_1e_2 = (I, 0, \ldots, 0)(0, I, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in N(\Gamma_N(R))$,
- $e_2e_3 = (0, I, \ldots, 0)(0, 0, I, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in N(\Gamma_N(R))$,
- $e_3e_1 = (0, 0, I, \ldots, 0)(I, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in N(\Gamma_N(R))$.

Hal tersebut mengakibatkan $gr(\Gamma_N(R)) = 3$. □

Diperhatikan bahwa jika F suatu lapangan, maka $(\Gamma_N(F))$ kosong. Sehingga pada lema selanjutnya, diberikan karakterisasi $gr(\Gamma_N(M_n(F)))$, dengan $n \geq 2$.

Lemma 10 *[9] Jika F suatu lapangan dan $n \geq 2$, maka* $gr(\Gamma_N(M_n(F))) = 3$.

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

Bukti. Dapat ditemukan $3-$sikel yaitu $E_{1n} \sim E_{nn} \sim \sum_{i=1}^{n} E_{1i} \sim E_{1n}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} E_{1n}E_{nn} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in N\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{nn}\sum_{i=1}^{n} E_{1i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in N\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_{1i}E_{1n} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in N\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Dengan kata lain terbukti $gr\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right) = 3$. □

Selanjutnya diberikan beberapa karakterisasi *girth* graf nilpoten atas ring R yang isomorfis dengan kartesian dua himpunan.

Lemma 11 *[9] Misalkan $R \cong M_{n_1}\left(F_1\right) \times M_{n_2}\left(F_2\right)$, setiap F_i adalah lapangan dan $|F_i| \geq 3$ untuk suatu i. Jika $n_1, n_2 \geq 2$, maka $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = 3$.*

Bukti. Misalkan e_i merupakan vektor $1 \times n$ dengan komponen ke$-i$ adalah I dan komponen lainnya adalah 0. Pertama misalkan $|F_1| \geq 3$. Untuk suatu $a \in {F_1}^*$ dapat dibentuk sikel $e_1 \sim (aE_{1n_1}, 0) \sim e_2 \sim e_1$. Oleh karena itu diperoleh $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = 3$. Bukti tersebut juga digunakan untuk $|F_2| \geq 3$ □

Lemma 12 *[9] Jika F_1, F_2 lapangan dan $n \geq 2$, maka $gr\left(\Gamma_N\left(F_1 \times M_n\left(F_2\right)\right)\right) = 3$*

Bukti. Berdasarkan bukti Lema 10, dapat ditemukan sikel $E_{1n} \sim E_{nn} \sim \sum\limits_{i=1}^{n} E_{1i} \sim E_{1n}$ pada $\Gamma_N\left(M_n\left(F_2\right)\right)$. Sehingga juga dapat ditemukan sikel $(0, E_{1n}) \sim (0, E_{nn}) \sim \left(0, \sum\limits_{i=1}^{n} E_{1i}\right) \sim (0, E_{1n})$ pada $\Gamma_N\left(F_1 \times M_n\left(F_2\right)\right)$. □

Lemma 13 *[9] Girth graf $\Gamma_N\left(M_{n_1}\left(\mathbb{Z}_2\right) \times M_{n_2}\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)$ adalah 3 atau ∞.*

Bukti. Misalkan e_i merupakan vektor $1 \times n$ dengan komponen ke$-i$ adalah I dan komponen lainnya adalah 0. Jika $n_1 \geq 2$, maka dapat dibentuk sikel $e_1 \sim e_2 \sim (E_{1n_1}, 0) \sim e_1$, yang mengakibatkan $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = 3$. Hal tersebut juga berlaku untuk bukti ketika $n_2 \geq 2$. Sebaliknya jika $n_1 = n_2 = 1$, maka $\Gamma_N\left(R\right) = K_2$, yang artinya graf tersebut tidak memuat sikel. Sehingga diperoleh $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = \infty$. □

Dapat diamati pada Lema 10 dan Lema 11 terdapat hubungan bahwa untuk $n \geq 2$ girth graf $\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)$ dan graf $\Gamma_N\left(M_n\left(F\right) \times M_n\left(F\right)\right)$ adalah 3.

III. KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa :

1. Untuk $n \geq 3$, diameter graf $(\Gamma_N(M_n(F)))$ adalah 2. Dengan kata lain untuk sebarang $A, B \in M_n(F)$, jika A tidak bertetangga dengan B atau hasil kali AB bukan nilpoten, maka dapat ditemukan titik lain $X \in M_n(F)$ sehingga AX dan BX keduanya merupakan elemen nilpoten ring $M_n(F)$ dan membentuk lintasan $A \sim X \sim B$.

2. Untuk $n = 2$, diameter graf $(\Gamma_N(M_n(F)))$ adalah 3. Dengan kata lain untuk sebarang $A, B \in M_n(F)$, jika A tidak bertetangga dengan B atau hasil kali AB bukan nilpoten, maka dapat ditemukan titik lain $X, Y \in M_n(F)$ sehingga AX, XY, dan YB masing-masing merupakan elemen nilpoten ring $M_n(F)$ dan membentuk lintasan $A \sim X \sim Y \sim B$.
   Selanjutnya, jika F suatu lapangan dan $n \geq 2$, maka $gr(\Gamma_N(M_n(F))) = 3$. Artinya untuk sebarang $A \in M_n(F)$, terdapat $X, Y \in M_n(F)$ sehingga AX, XY, YA masing-masing merupakan elemen nilpoten ring $M_n(F)$ dan membentuk sikel $A \sim X \sim Y \sim A$.

3. Jika $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i), F_1, \ldots, F_k$ adalah lapangan - lapangan berhingga, $n_1, \ldots, n_k, k$ adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka pernyataan-pernyataan berikut terpenuhi :
   (i) jika $n_i \geq 3$ untuk suatu i, $1 \leq i \leq k$, maka $diam(\Gamma_N(R)) = 2$,
   (ii) jika $n_i \leq 2$ untuk $i = 1, ..., k$, dan $n_j = 2$ untuk suatu j, $1 \leq j \leq k$ maka $diam(\Gamma_N(R)) = 3$.

Penelitian ini masih berfokus pada graf nilpoten atas lapangan. Diharapkan untuk pengembangan penelitian ini, dapat dikaji lebih lanjut tentang graf nilpoten atas ring berhingga secara umum.

REFERENSI

[1] Akbari, S., Mohammadian, A, ”On Zero-Divisor Graph of Finite Rings”, *Journal of Algebra*, vol. 13, pp. 168-184, 2007.

[2] Akbari, S., Mohammadian, A, ”Zero-Divisor Graphs of Non-Commutative Rings”, *Journal of Algebra*, vol. 296, pp. 462-479, 2006.

[3] Anderson, D. F., Badawi, A, ”The Total Graph of A Commutative Ring”, *Journal of Algebra*, 3vol. 20, pp. 2706-2710, 2008.

[4] Anderson, D. F., Livingston, P, ”The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring”, *Journal of Algebra*, vol. 217, pp. 434-447, 1999.

[5] Beck, I, ”Coloring of Commutative Rings”, *Journal of Algebra*, vol. 116, pp. 208-226, 1988.

[6] Biswas, D, ”Realm of Matrices : Exponential and Logarithm Functions”, vol. 20, no. 2, pp. 136-150, 2015.

[7] Li, A.-H., Li, Q.-S, ”A Kind of graph Structure on Non-reduced Rings”, *Algebra Colloquium*, vol. 17, no. 1, pp. 173-180.

[8] Li, A.-H., Li, Q.-S, ”A Kind of Graph Structure on Von-Neumann Regular Rings”, *International Journal of Algebra*, vol. 4, pp. 291-302, 2010.

[9] Nikmehr, M. J., Khojasteh, S. ”On The Nilpotent Graph of a Ring”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 37, pp. 553-559, 2013.

[10] Un, K.J, All Nilpotent 2×2 Matrices, retrieved March 22 from Stack Exchange : https://math.stackexchange.com/questions/1200829/allnilpotent-2-times-2-matrices.