$(M_{n_i}(F_i))$ sedemikan sehingga $d(x_i, y_i) = 3$. Kemudian misalkan $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$, mudah diketahui bahwa $d(x, y) = 3$.

□

Berdasarkan Lema 8 diperoleh diameter graf $\Gamma_N(M_2(F) \times M_2(F))$ adalah 3. Diketahui pula sebelumnya bahwa pada Teorema 3 diameter graf $\Gamma_N(M_2(F))$ adalah 3. Dapat diamati bahwa elemen nilpoten pada $M_2(F)$ berpengaruh pada penentuan elemen nilpoten $(M_2(F) \times M_2(F))$. Sehingga jarak sebarang dua titik u, v di $\Gamma_N(M_2(F))$ juga berpengaruh pada jarak sebarang dua titik u, v di $\Gamma_N(M_2(F) \times M_2(F))$. Dengan kata lain diameter graf $\Gamma_N(M_2(F))$ berpengaruh terhadap diameter graf $\Gamma_N(M_2(F) \times M_2(F))$.

Begitu pula terdapat hubungan antara $diam(\Gamma_N(M_n(F)))$ untuk $n \geq 3$ dan $diam(\Gamma_N(R))$ dengan $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i)$ untuk $n_i \geq 3$. Diperhatikan bahwa berdasarkan Teorema 1 dan Lema 7 diperoleh diameter masing-masing graf tersebut adalah 2.

Setelah diberikan beberapa karakterisasi diameter graf nilpoten , berikut dipaparkan beberapa karakterisasi *girth* graf nilpoten ring matriks.

Lemma 9 *[9] Jika* $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i), F_1, \ldots, F_k$ *adalah lapangan - lapangan berhingga,* $n_1, \ldots, n_k$ *adalah bilangan-bilangan bulat positif dan* $k \geq 3$*, maka* $gr(\Gamma_N(R)) = 3$.

Bukti. Misalkan e_i merupakan vektor $1 \times n$ dengan komponen ke$-i$ adalah I dan komponen lainnya adalah 0. Karena $k \geq 3$, sehingga dapat dibentuk $3-$sikel pada $(\Gamma_N(R))$ yaitu $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_1$. Diperhatikan bahwa :

- $e_1 e_2 = (I, 0, \ldots, 0)(0, I, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in N(\Gamma_N(R))$,
- $e_2 e_3 = (0, I, \ldots, 0)(0, 0, I, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in N(\Gamma_N(R))$,
- $e_3 e_1 = (0, 0, I, \ldots, 0)(I, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) \in N(\Gamma_N(R))$.

Hal tersebut mengakibatkan $gr(\Gamma_N(R)) = 3$. □

Diperhatikan bahwa jika F suatu lapangan, maka $(\Gamma_N(F))$ kosong. Sehingga pada lema selanjutnya, diberikan karakterisasi $gr(\Gamma_N(M_n(F)))$, dengan $n \geq 2$.

Lemma 10 *[9] Jika* F *suatu lapangan dan* $n \geq 2$*, maka* $gr(\Gamma_N(M_n(F))) = 3$.

Bukti. Dapat ditemukan $3-$sikel yaitu $E_{1n} \sim E_{nn} \sim \sum_{i=1}^{n} E_{1i} \sim E_{1n}$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} E_{1n}E_{nn} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in N\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{nn}\sum_{i=1}^{n} E_{1i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in N\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E_{1i}E_{1n} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in N\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Dengan kata lain terbukti $gr\left(\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)\right) = 3$. □

Selanjutnya diberikan beberapa karakterisasi *girth* graf nilpoten atas ring R yang isomorfis dengan kartesian dua himpunan.

Lemma 11 *[9] Misalkan $R \cong M_{n_1}\left(F_1\right) \times M_{n_2}\left(F_2\right)$, setiap F_i adalah lapangan dan $|F_i| \geq 3$ untuk suatu i. Jika $n_1, n_2 \geq 2$, maka $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = 3$.*

Bukti. Misalkan e_i merupakan vektor $1 \times n$ dengan komponen ke$-i$ adalah I dan komponen lainnya adalah 0. Pertama misalkan $|F_1| \geq 3$. Untuk suatu $a \in {F_1}^*$ dapat dibentuk sikel $e_1 \sim (aE_{1n_1}, 0) \sim e_2 \sim e_1$. Oleh karena itu diperoleh $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = 3$. Bukti tersebut juga digunakan untuk $|F_2| \geq 3$ □

Lemma 12 *[9] Jika F_1, F_2 lapangan dan $n \geq 2$, maka $gr\left(\Gamma_N\left(F_1 \times M_n\left(F_2\right)\right)\right) = 3$*

Bukti. Berdasarkan bukti Lema 10, dapat ditemukan sikel $E_{1n} \sim E_{nn} \sim \sum\limits_{i=1}^{n} E_{1i} \sim E_{1n}$ pada $\Gamma_N\left(M_n\left(F_2\right)\right)$. Sehingga juga dapat ditemukan sikel $(0, E_{1n}) \sim (0, E_{nn}) \sim \left(0, \sum\limits_{i=1}^{n} E_{1i}\right) \sim (0, E_{1n})$ pada $\Gamma_N\left(F_1 \times M_n\left(F_2\right)\right)$. □

Lemma 13 *[9] Girth graf $\Gamma_N\left(M_{n_1}\left(\mathbb{Z}_2\right) \times M_{n_2}\left(\mathbb{Z}_2\right)\right)$ adalah 3 atau ∞.*

Bukti. Misalkan e_i merupakan vektor $1 \times n$ dengan komponen ke$-i$ adalah I dan komponen lainnya adalah 0. Jika $n_1 \geq 2$, maka dapat dibentuk sikel $e_1 \sim e_2 \sim (E_{1n_1}, 0) \sim e_1$, yang mengakibatkan $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = 3$. Hal tersebut juga berlaku untuk bukti ketika $n_2 \geq 2$. Sebaliknya jika $n_1 = n_2 = 1$, maka $\Gamma_N\left(R\right) = K_2$, yang artinya graf tersebut tidak memuat sikel. Sehingga diperoleh $gr\left(\Gamma_N\left(R\right)\right) = \infty$. □

Dapat diamati pada Lema 10 dan Lema 11 terdapat hubungan bahwa untuk $n \geq 2$ girth graf $\Gamma_N\left(M_n\left(F\right)\right)$ dan graf $\Gamma_N\left(M_n\left(F\right) \times M_n\left(F\right)\right)$ adalah 3.

III. KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa :

1. Untuk $n \geq 3$, diameter graf $(\Gamma_N(M_n(F)))$ adalah 2. Dengan kata lain untuk sebarang $A, B \in M_n(F)$, jika A tidak bertetangga dengan B atau hasil kali AB bukan nilpoten, maka dapat ditemukan titik lain $X \in M_n(F)$ sehingga AX dan BX keduanya merupakan elemen nilpoten ring $M_n(F)$ dan membentuk lintasan $A \sim X \sim B$.

2. Untuk $n = 2$, diameter graf $(\Gamma_N(M_n(F)))$ adalah 3. Dengan kata lain untuk sebarang $A, B \in M_n(F)$, jika A tidak bertetangga dengan B atau hasil kali AB bukan nilpoten, maka dapat ditemukan titik lain $X, Y \in M_n(F)$ sehingga AX, XY, dan YB masing-masing merupakan elemen nilpoten ring $M_n(F)$ dan membentuk lintasan $A \sim X \sim Y \sim B$.
   Selanjutnya, jika F suatu lapangan dan $n \geq 2$, maka $gr(\Gamma_N(M_n(F))) = 3$. Artinya untuk sebarang $A \in M_n(F)$, terdapat $X, Y \in M_n(F)$ sehingga AX, XY, YA masing-masing merupakan elemen nilpoten ring $M_n(F)$ dan membentuk sikel $A \sim X \sim Y \sim A$.

3. Jika $R \cong \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(F_i), F_1, \ldots, F_k$ adalah lapangan - lapangan berhingga, $n_1, \ldots, n_k, k$ adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka pernyataan-pernyataan berikut terpenuhi :
   (i) jika $n_i \geq 3$ untuk suatu i, $1 \leq i \leq k$, maka $diam(\Gamma_N(R)) = 2$,
   (ii) jika $n_i \leq 2$ untuk $i = 1, ..., k$, dan $n_j = 2$ untuk suatu j, $1 \leq j \leq k$ maka $diam(\Gamma_N(R)) = 3$.

Penelitian ini masih berfokus pada graf nilpoten atas lapangan. Diharapkan untuk pengembangan penelitian ini, dapat dikaji lebih lanjut tentang graf nilpoten atas ring berhingga secara umum.

REFERENSI

[1] Akbari, S., Mohammadian, A, "On Zero-Divisor Graph of Finite Rings", *Journal of Algebra*, vol. 13, pp. 168-184, 2007.

[2] Akbari, S., Mohammadian, A, "Zero-Divisor Graphs of Non-Commutative Rings", *Journal of Algebra*, vol. 296, pp. 462-479, 2006.

[3] Anderson, D. F., Badawi, A, "The Total Graph of A Commutative Ring", *Journal of Algebra*, 3vol. 20, pp. 2706-2710, 2008.

[4] Anderson, D. F., Livingston, P, "The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring", *Journal of Algebra*, vol. 217, pp. 434-447, 1999.

[5] Beck, I, "Coloring of Commutative Rings", *Journal of Algebra*, vol. 116, pp. 208-226, 1988.

[6] Biswas, D, "Realm of Matrices : Exponential and Logarithm Functions", vol. 20, no. 2, pp. 136-150, 2015.

[7] Li, A.-H., Li, Q.-S, ”A Kind of graph Structure on Non-reduced Rings”, *Algebra Colloquium*, vol. 17, no. 1, pp. 173-180.

[8] Li, A.-H., Li, Q.-S, ”A Kind of Graph Structure on Von-Neumann Regular Rings”, *International Journal of Algebra*, vol. 4, pp. 291-302, 2010.

[9] Nikmehr, M. J., Khojasteh, S. ”On The Nilpotent Graph of a Ring”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 37, pp. 553-559, 2013.

[10] Un, K.J, All Nilpotent 2×2 Matrices, retrieved March 22 from Stack Exchange : https://math.stackexchange.com/questions/1200829/allnilpotent-2-times-2-matrices.