JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

ESTIMASI PARAMETER MODEL AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTICITY MENGGUNAKAN METODE BAYES

Mila Setia Dewi[1*], Sutarman[2]

[1,2]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sumatera Utara*
Email : [1]milasetiadewi6451@gmail.com, [2] sutarman@usu.ac.id
[*]Penulis Korespondensi

Abstract. *This research has a purpose estimate the parameters of the Autoregressive Conditional Heteroscedasticity model using the Bayes method and then compare it with the Maximum Likelihood method. In the Bayes method, the prior distribution is combined with the Likelihood function to obtain a posterior distribution, which will be the basis for inference. Selection of different priors will result in different inferences. The prior distribution used in this study is a exponential distributed prior. After the posterior distribution is obtained, a Markov Chain Monte Carlo simulation is performed using the Metropolist-Hasting Algorithm. From the results of the Markov Chain Monte Carlo simulation, the ARCH model estimator using the Bayes method is obtained and then compared with the ARCH model estimator using the Maximum Likelihood method. Based on this research, it is known that by using the same data the mean residual and standard error values using the Bayes method are smaller than the Maximum Likelihood method. The results of the mean residual and standard error using the Bayes method are 0.4372 and 0.0272. Meanwhile, the residual mean and standard error using the Maximum Likelihood method are 0.9166 and 0.0456. From these results it can be seen that the parameter estimation using the Bayes method is good for this model.*
Keywords: *Parameters Estimation, ARCH Model, Bayes Method*

Abstrak. Penelitian ini bertujuan menaksir parameter model ARCH menggunakan Metode Bayes kemudian akan dibandingkan dengan metode Maksimum Likelihood. Pada metode Bayes distribusi prior digabungkan dengan fungsi Likelihood untuk memperoleh distribusi posterior, yang akan menjadi dasar dalam inferensi. Pemilihan prior yang berbeda akan menghasilkan inferensi yang berbeda pula. Distribusi prior yang digunakan dalam penelitian ini adalah prior berdistribusi eksponensial. Setelah distribusi posterior diperoleh, dilakukan simulasi Markov Chain Monte Carlo dengan menggunakan Algoritma Metropolist-Hasting. Dari hasil simulasi MCMC tersebut diperoleh estimator model ARCH menggunakan metode Bayes dan kemudian dibandingkan dengan estimator model ARCH menggunakan metode Maksimum Likelihood. Berdasarkan penelitian ini diketahui bahwa dengan menggunakan data yang sama nilai *mean residual* dan *standard error* menggunakan metode Bayes lebih kecil dibandingkan metode Maksimum Likelihood. Hasil *mean residual* dan *standard error* menggunakan metode Bayes adalah 0,4372 dan 0,0272. Sedangkan *Mean residual* dan *standard error* menggunakan metode Maksimum Likelihood adalah 0,9166 dan 0,0456. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa estimasi parameter menggunakan metode Bayes baik digunakan pada model ini.
Kata Kunci: Estimasi Parameter, Model ARCH, Metode Bayes

I. PENDAHULUAN

Metode Bayes adalah suatu metode yang berdasarkan pada teori probabilitas yang dihitung dari teorema Bayes. Secara khusus, metode Bayes menyediakan metode formal untuk memasukkan prior sebelumnya ke dalam estimasi parameter yang tidak diketahui [1]. Metode ini memiliki kelebihan diantaranya yaitu estimasinya lebih sederhana dalam situasi distribusi tidak standar atau regresi non-linier tidak realistis, memberikan pendekatan sederhana untuk mendapatkan hasil yang berkelanjutan dan diskrit [2].

Estimasi parameter adalah pendugaan nilai karakteristik populasi (parameter) berdasarkan karakteristik sampel. Estimasi parameter dibagi menjadi dua yaitu estimasi interval dan estimasi titik Estimasi interval (*interval estimation*) adalah pendugaan nilai karakteristik populasi dengan menggunakan nilai-nilai statistik yang berada dalam suatu interval. Sedangkan estimasi titik merupakan pendugaan nilai karakteristik populasi (parameter) dengan memakai satu nilai statistik dari sampel yang diambil dari populasi tersebut.

Metode klasik dan metode Bayes adalah salah satu contoh estimasi titik. Metode klasik adalah metode yang didasarkan pada inferensi data sampel yang diambil dari populasi. Dalam metode klasik terdapat salah satu metode yang bernama metode maksimum likelihood. Metode maksimum likelihood adalah metode yang memaksimumkan fungsi likelihoodnya.

Metode maksimum likelihood telah banyak diterapkan dalam mengestimasi parameter. Namun, metode maksimum likelihood memiliki kelemahan yaitu distribusi sampling parameter memerlukan asumsi normalitas. Kemudian, nilai *standard error* pada estimasi parameter dengan metode maksimum likelihood untuk ukuran sampel kecil cenderung lebih besar sehingga hasil uji parameter cenderung tidak signifikan [2]. Dalam hal ini, metode Bayes dapat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut. Pada metode Bayes sampel MCMC diambil dari posterior tanpa memperhatikan ukuran sampel atau ketika ada asumsi non-normalitas [2].

Asumsi utama dari model *Autoregressive* (AR) adalah menganggap data *time series* memiliki suatu variansi yang konstan. Variansi adalah variabel dalam statistik yang memaparkan seberapa jauh perubahan data terhadap rata-ratanya. Dalam kasus lain, asumsi ini mungkin tidak realistis. Misalnya pada pasar keuangan, umumnya disepakati bahwa kondisi data di pasar keuangan cenderung memiliki volatilitas yang tinggi. Volatilitas adalah suatu kondisi di mana mean dan ragam tidak konstan [3]. Akibat dari adanya volatilitas yang tinggi tentunya akan sulit dilakukan estimasi dan memprediksi pergerakan nilai di pasar keuangan. Data runtun waktu yang memiliki volatilitas yang tinggi disebut juga heteroskedastisitas bersyarat (*Conditional Heterokedasticity*). Pada tahun 1982 Engle memperbaiki asumsi ini dengan memperkenalkan sebuah metode runtun waktu yaitu *Autoregressive Conditional Heterokedasticity* (ARCH).

Ari Pani Desvina dan Inggrid Octaviani Meijer (2018) melakukan penelitian mengenai Penerapan Model ARCH/GARCH untuk Peramalan Nilai Tukar Petani an diperoleh hasil bahwa dengan menggunakan model ARCH(1) dilakukan peramalan sebanyak 5 bulan kedepan dimulai bulan April 2017 menunjukkan persentase nilai MAPE yang rendah, ini menghasilkan peramalan mendekati data actual [4]. Penelitian Rizki dkk (2021) mengenai penerapan Model ARCH/GARCH untuk Memprediksi Harga Saham Perusahaan Tokai Carbo memperoleh hasil nilai AIC terkecil yang diperoleh sebesar 296.4776, serta diperoleh nilai MAPE untuk model sebesar 4.949972%. Berdasarkan nilai AIC dan nilai MAPE, dapat disimpulkan bahwa model GARCH (0,1) atau ARCH(1) sudah cukup baik untuk memprediksi harga saham perusahaan Tokai Carbon [5]. Penelitian yang dilakukan oleh Simatupang dan sutarman (2022) tentang penaksiran parameter model ARIMA dengan menggunakan metode Bayes diperoleh hasil bahwa dengan simulasi yang dilakukan dapat dilihat bahwa metode bayes lebih baik digunakan dibandingkan dengan metode Maksimum Likelihood. Hal tersebut dapat dilihat dri nilai MSE dengan menggunakan metode bayes yang lebih kecil dibandingkan metode Maksimum Likelihood [6]. Katianda dkk.(2020) melakukakn penelitian mengenai estimasi parameter regresi linier dengan metoe bayes dan diperoleh hasil dengan interval kredibel 95% model ini dapat dipercaya sebesar 0,643 atau 64,3%. Sedangkan sisanya 35,7% dipengaruhi oleh faktor lain yang tidak diteliti [7].

I.1 Model *Autoregressive*

Model *Autoregressive* merupakan bentuk model regresi yang memetakkan nilai pengamatan Z_t dengan nilai-nilai sebelumnya pada interval waktu tertentu [8]. Jika periode yang memberikan perngaruh terhadap nilai Y_t bukan hanya satu maupun dua periode, akan tetapi hingga sebanak p periode, maka diperoleh persamaan model *Autoregressive* yaitu [9]:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \tag{1}$$

dengan Y_t menyatakan nilai variabel pada waktu ke-t, t =1, 2, 3,…, n, Y_{t-i} adalah data pada periode t-i, i =1, 2, 3, …, n, ε_t adalah nilai residual pada waktu ke-t , β_p adalah koefisien regresi, p=1, 2, 3, …, n, dan p adalah order AR.

I.2 Stasioneritas

Runtun waktu dikatakan stasioner jika tidak terdapat unsur *trend* dan unsur musiman dalam data. Keadaan stasioner terbagi dua, yaitu stasioner pada rata-rata dan stasioner pada varian. Apabila data belum stasioner dalam rata-rata maka perlu dilakukan pembedaan dengan persamaan sebagai berikut [10]:

$$Z_t^d = (1-B)^d Z_t \tag{2}$$

dengan Z_t^d adalah data ke-t dengan *diffenecing*dengen orede ke-*d* , d adalah orde *differencing,* dan Z_t adalah data ke-t. Apabila data belum stasioner dalam varian dapat dilakukan dengan proses transformasi.

I.3 Uji *Unit Root* Augmented Dickey-fuller (ADF)

Uji ADF adalah pengembangan uji Dickey Fuller. Uji stasioner dengan uji ADF adalah sebagai berikut:

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \gamma Y_{t-1} + \beta_i \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

dengan ΔY_t adalah turunan pertama, Y_{t-1} adalah nilai variabel pada waktu ke- t-1, γ, β adalah aarameter, dan n adalah lag.

Apabila $|t| >$ nilai mutlak kritis Mackinnon, maka H_0 tidak diterima yang artinya data tidak memiliki unit root (data stasioner). Uji ADF juga dapat dilakukan dengan perbandingan *p-value* dengan nilai α jika *p-value* < α maka H_0tidak diterima yang berarti data data tidak memiliki unit root (data stasioner).

I.4 Fungsi Autokorelasi dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Autokorelasi adalah suatu fungsi yang memaparkan nilai korelasi antara data pengamatan waktu ke-*t* terhadap pengamatan waktu-waktu yang lalu. Persamaan autokorelasi sampel *lag* ke-*k* adalah sebagai berikut [11]:

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{n=k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2} \tag{4}$$

dengan ρ_k adalah koefisien autokorelasi ke-k, $\bar{Z}$ adalah rata-rata data, Z_t adalah data ke-t, dan Z_{t+k} adalah data ke-t+k.

Selanjutnya, autokorelasi parsial dipakai untuk melihat tingkat kedekatan antara Z_t dan Z_{t-k} apabila pengaruh dari *lag* waktu (*time lag*) *1, 2, 3,…, k-1* diasumsikan terpisah. Nilai autokorelasi parsial sampel dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\emptyset_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \emptyset_{k-1x,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \emptyset_{k-1x,j}\rho_{k-j}} \tag{5}$$

dengan $\emptyset_{kk}$ adalah koefisien autokorelasi ke-k,k, $\emptyset_{k-1x,j}$ adalah koefisien autokorelasi ke-k-x,j, ρ_k adalah koefisien autokorelasi ke-k, ρ_{k-j} adalah koefisien autokorelasi ke-k-j.
Jika ada sebanyak *p lag* autokorelasi parsial yang berbeda signifikasn dari nol maka proses yang terjadi adalah *AR*(*p).*

I.5 Heteroskedastisitas

Heteroskedastisitas adalah kondisi dimana data mempunyai varians residual yang tidak konstan atau dengan kata lain saat varians (σ^2) dan Residual (ε_i) berbeda untuk setiap observasi. Heteroskedastisitas dinyatakan dengan persamaan [12]:

$$var(u|y_1, y_2, \dots, y_k) = \sigma_i^2 \tag{6}$$

dengan $var(u|y_1, y_2, \dots, y_k)$ adalah varians data u terhadap $y_1, y_2, \dots, y_k$, σ_i^2 adalah varians ke-i. Persamaan tersebut dapat dibuat dalam bentuk multiplikatif sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{h_t} \tag{7}$$

dengan ε_t adalah residual ke-t, dan v_t adalah volatilitas ke-t dengan $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 + u_t$ dan v_t berdistribusi normal standart.

I.6 Uji ARCH-Lagrange Multiplier (ARCH-LM)

Uji ARCH-LM dipakai untuk melihat ada atau tidaknya gejala heteroskedastisitas dalam data *time series*. Pada uji tersebut varian residual bukan hanya fungsi dari variabel independen tetapi tergantung pada residual kuadrat pada periode sebelumnya [3]. Keputusan dalam uji ACH-LM H_0 ditolak jika $TR^2 > x_p^2\,(\alpha)$, maka model menganfung efek ARCH dalam data *time series* tersebut, Statistik uji TR^2 dengan T adalah menyatakan banyaknya galat.

I.7 Model ARCH

Model *Autoregressive Conditional Heterokedasticity* (ARCH) adalah model autoregresif yang memiliki variansi yang tidak konstan. Persamaan model ARCH sebagai berikut:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 \tag{8}$$

dengan ε_t^2 adalah residual kuadrat ke-t, ε_{t-p}^2 adalah residual kuadrat ke-t-p, dan $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ adalah parameter model ARCH.

Menurut Tsay (2010) untuk menentukan orde dari model ARCH dapat dilihat pada grafik PACF dari kuadrat residual (ε_t^2). Jika sebanyak *p lag autokorelasi* parsial yang berbeda signifikasn dari nol maka proses yang terjadi adalah *ARCH*(*p)* [13].

I.8 Teorema Bayes

Metode Bayes didasarkan pada teorema Bayes. Pada teorema Bayes, dimisalkan Bi, $i = 1,2,...,n$ adalah bagian dari ruang sampel S dengan $P(Bi) \neq 0$ dan adalah kejadian yang saling lepas maka untuk sembarang kejadian A di mana $P(A) \neq 0$, peluang Bi dengan syarat A adalah sebagai berikut [14]:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)} \tag{9}$$

I.9 Distribusi Prior dan Distribusi Posterior

Distribusi Prior adalah suatu bentuk distribusi frekuensi yang mewakili tujuan atau subjektivitas seseorang dalam melihat suatu parameter menurut penilaiannya sendiri [14]. Distribusi prior dibagi menjadi dua berdasarkan fungsi likelihood modelnya, yaitu sebagai berikut:

1. Berhubungan dengan bentuk distribusi pola data.
   a. Distribusi prior konjugat (*conjugate*),
   b. Distribusi prior tidak konjugat (*non-conjugate*)
2. Berhubungan dengan penentuan parameter pola data.
   a. Distribusi prior informatif.
   b. Distribusi prior non-informatif,

Distribusi posterior merupakan fungsi densitas bersyarat θ jika nilai dari observasi x diketahui. Distribusi posterior adalah perkalian antara prior yang ditentukan dengan fungsi likelihoodnya. Distribusi posterior dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut:

$$P(\theta|y) = P(\theta, y)l(y) \tag{10}$$

I.10 Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

MCMC adalah algoritma simulasi stokastik yang berdasarkan pola kerja pada rantai Markov dan simulasi Monte Carlo dengan cara pembangkitan data sampel berdasarkan cara resampling tertentu [15]. Penggunaan metode MCMC dalam analisis metode Bayes memerlukan metode sampling yang sesuai untuk memperoleh sampel dari distribusi tertentu. Terdapat bebrapa algoritma yang diunakan pada metode MCMC, salah satunya adalah algoritma Metropolis-Hasting.

I.11 Metropolis-Hasting

Metropolis-Hasting adalah metode MCMC yang menerapkan prosedur penerimaan dan penolakan dalam proses pembangkitkan sampel data dari distribusi proposalnya. Distribusi proposal adalah suatu distribusi yang berfungsi untuk pembangkitkan sampel acak[15]. Misalkan $p(\boldsymbol{\theta}|z)$ adalah distribusi posterior yang ingin dibangkitkan dengan besar sampel T. Misalkan $\boldsymbol{\theta}$ adalah parameter dari nilai-nilai yang dibangkitkan pada iterasi ke-t. Langkah-langkah algoritma Metropolis-Hasting adalah sebagai berikut:

1. Menetapkan nilai awal $\boldsymbol{\theta}_0$
2. Menetapkan jumlah iterasi t = 1, . . . , T
3. Membangkitkan $(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \ldots, \boldsymbol{\theta}_t)$ dengan langkah-langkah berikut:
   a. Mengatur $\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1}$
   b. Menetapkan distribusi proposal $N(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$
   c. Membangkitkan nilai baru $\boldsymbol{\theta}'$dari distribusi proposal $N(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$
   d. Menghitung $\alpha = \min\left(1, \frac{p(\boldsymbol{\theta}',)*L(\boldsymbol{\theta}|Y)}{p(\boldsymbol{\theta})*L(\boldsymbol{\theta}|Y)}\right)$
   e. Membangkitkan u dari distribusi uniform (0,1)
   f. Menghitung $u = log(u)$
   g. Membandingkan nilai u dengan α, apabila $u \leq \alpha$ maka nilai $\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}'$. Sedangkan apabila $u > \alpha$ maka nilai $\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1}$
4. Ulangi prosedur a sampai g hingga konvergen.

I.12 Metode Maksimum Likelihood

Misalkan x_1 , x_2 , ⋯ , x_n merupakan sampel acak dari populasi dengan densitas $f(x, \theta)$ di mana $\boldsymbol{\theta}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ merupakan parameter tak diketahui, fungsi likelihood dituliskan [16]:

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta}) \tag{11}$$

Fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter yang tidak diketahui θ. Dalam aplikasi (θ) memaparkan fungsi densitas peluang bersama dari sampel acak. Jika S adalah ruang parameter interval terbuka dan (θ) merupakan fungsi yang bisa diturunkan serta diasumsikan maksimum pada S maka persamaan maksimum likelihodnya adalah [16].

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}) = 0 \tag{12}$$

Ketika menentukan nilai estimator kemungkinan maksimum, itu sering lebih mudah menentukan nilai dari parameter yang memaksimumkan logaritma natural dari fungsi likelihood daripada nilai parameter yang memaksimumkan fungsi likelihood itu sendiri. Karena fungsi logaritma natural adalah fungsi naik, dan solusinya akan sama. Sehingga persamaan log-likelihoodnya adalah [16].

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln L(\boldsymbol{\theta}) = 0 \tag{13}$$

II. PEMBAHASAN

II.1 Distribusi Prior dan Distribusi Posterior Model ARCH

Pada penelitian diasumsikan bahwa prior yang digunakan adalah prior yang berdistribusi eksponensial yaitu:

$$p\left(\alpha_{0,}\alpha_{1,}\alpha_{2,} \dots \alpha_{n,}\right) = exp(\lambda) \tag{14}$$

Sehingga, fungsi densitas bersyarat dari model ARCH(p) dengan $\gamma = \left(\alpha_{0,}\alpha_{1,}\alpha_{2,} \dots \alpha_{n,}\right)$ adalah [13].

$$f(\varepsilon_t/\psi_{t-1}|\gamma) = f\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}\right)\left|\frac{1}{\sqrt{h_t}}\right|$$

$$f(\varepsilon_t/\psi_{t-1}|\gamma) = (2\pi h_t)^{\frac{1}{2}}\, exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right) \tag{15}$$

Fungsi likelihood pada sampel dengan ukuran T adalah sebagai berikut:

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T|\gamma) = \left(\prod_{t=p+1}^{T} f(\varepsilon_t/\psi|\gamma)\right)$$

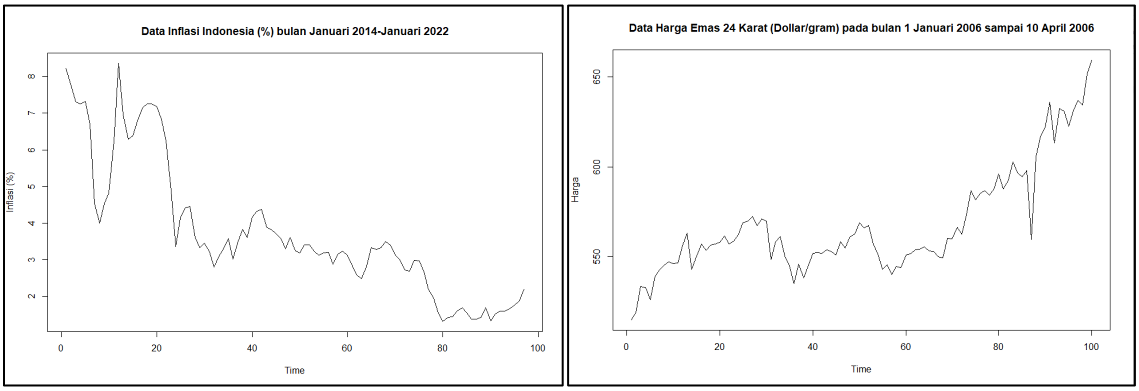
$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T|\gamma) = \left(\prod_{t=p+1}^{T} (2\pi h_t)^{\frac{1}{2}}\, exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right)\right) \tag{16}$$

Setelah fungsi likelihood dan distribusi prior dari model ARCH diperoleh, kemudian akan dicari distribusi posterior dari model ARCH dengan mengalikan distribusi prior yang ditentukan dengan fungsi likelihood model tersebut. Distribusi posterior dari Model ARCH adalah

$$P(\alpha_{0,}\alpha_{1,}\alpha_{3,} \dots \alpha_n|Y) = exp(\lambda)\left(\prod_{t=p+1}^{T} (2\pi h_t)^{\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right)\right) \tag{17}$$

II.2 Uji Stasioneritas

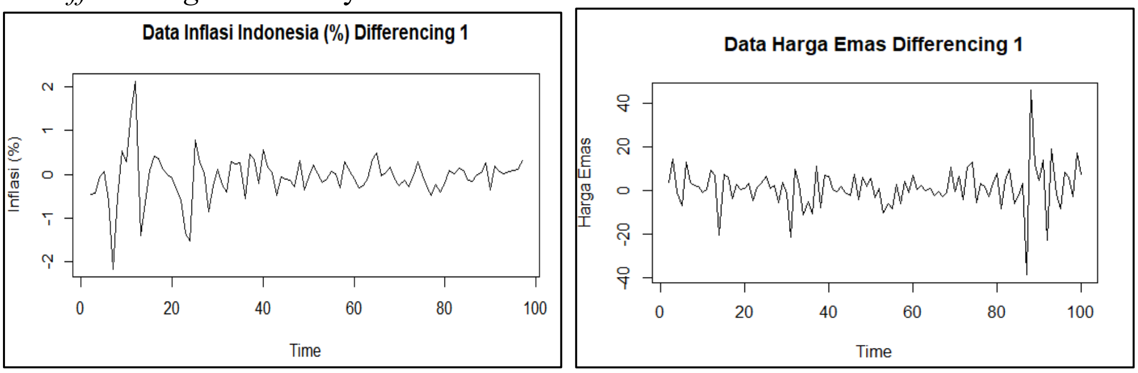
Pada paper ini akan digunakan contoh data untuk melakukan penaksiran parameter model ARIMA. Data runtun waktu yang akan dianalisis adalah data Inflasi Indonesia (%) pada bulan Januari 2014 sampai Januari 2022 dan data data runtun waktu yang digunakan berukuran $n = 96$ Serta Data Harga Emas 24 Karat (Dollar/gram) pada bulan 1 Januari 2006 sampai 10 April 2006 dan data data runtun waktu yang digunakan berukuran $n = 100$. Berikut grafik data runtun waktu yang digunakan.



(a) (b)

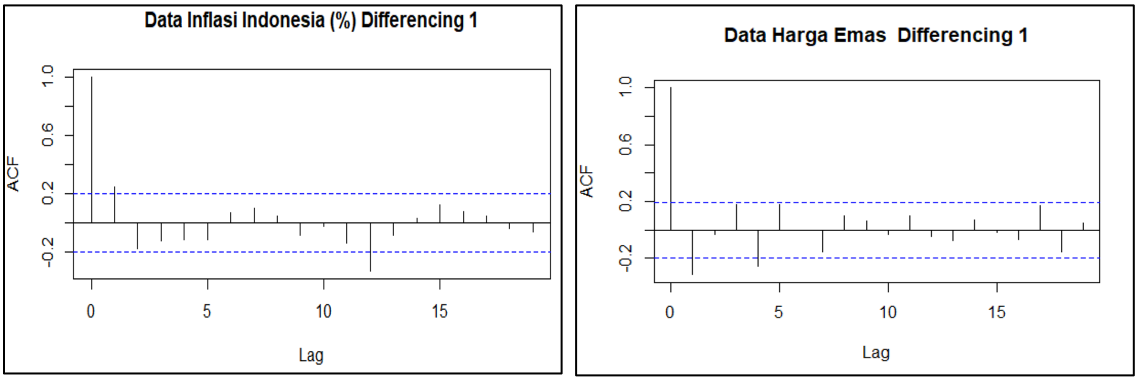
Gambar 1. Plot Data Inflasi Indonesia (a) dan Data Harga Emas (b)
(Sumber : a. Badan Pusat Statistik ; b harga-emas.org)

Pada Plot Data Inflasi Indonesia (%) pada bulan Januari 2014 hingga Januari 2022 gambar 1(a) menunjukkan bahwa data turun lambat yang menandakan adanya trend turun dan pada plot Data Harga Emas 24 Karat (Dollar/gram) pada bulan 1 Januari 2006 sampai 10 April 2006 gambar 1(b) menunjukkan bahwa data turun lambat yang menandakan adanya trend naik sehingga kedua data tersebut tidak stasioner. Karena data tidak stasioner, maka dilakukan proses *differencing* data sebanyak satu kali.



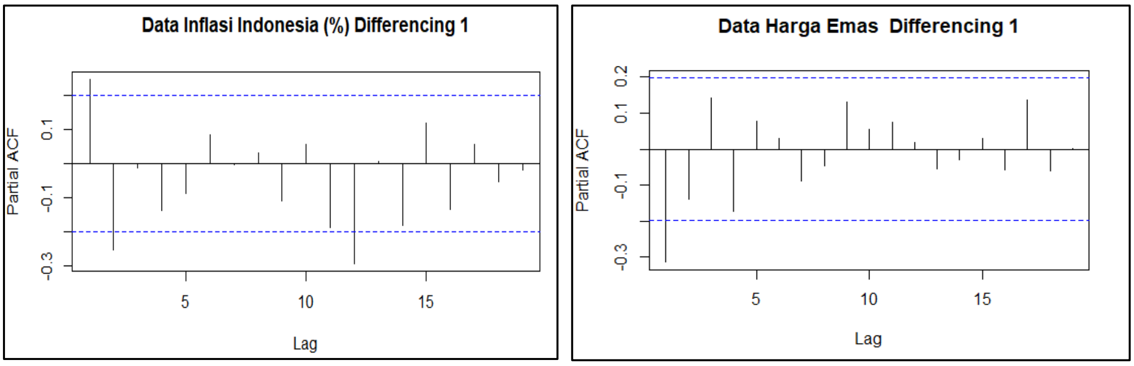
(a) (b)

Gambar 2. Plot Data Inflasi Indonesia dan Data Harga Emas *Differencing* 1



(a) (b)

Gambar 3. Plot ACF Data Inflasi Indonesia dan Data Harga Emas *Differencing*



(a) (b)

Gambar 4. Plot PACF Data Inflasi Indonesia dan Data Harga Emas *Differencing*

Pada grafik fungsi autokorelasi data *differencing* Gambar 3(a) pada data inflasi diperoleh nilai autokorelasi *lag* 1 berada diluar batas signifikanya yang artinya terdapat hubungan yang signifikan antara nilai antara satu variabel dengan variabel lain. Pada autokorelasi *lag* berada direntang batas signifikannya yang artinya tidak ada hubungan yang signifikan antara satu variabel dengan variabel lainnya. Karena *lag* 2 dan *lag* 3 tidak berbeda signifikan, maka data stasioner pada *diffrenecing* satu. Untuk memperjelas bahwa data stasioner atau, maka dapat dilakukan uji stasioner dengan Uji ADF. Adapun hasil uji ADF yang diperoleh sebesar -5.404 dengan p-value sebesar 0.01. Nilai Kritis Mackinnon pada taraf α = 5% adalah -3,487845. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa $|t| >$ nilai mutlak statistik-t untuk nilai kritis Mackinnon $(|-5{,}404| > |-3{,}48785|)$. Pada p-value juga dapat dilihat bahwa p-value $< \alpha = (0{,}01 < 0{,}05)$. Jadi dapat disimpulkan H_0 ditolak yang artinya data inflasi Indonesia yang telah dilakukan *differencing* sebanyak satu kali tidak mengandung unit root. Artinya data tersebut stasioner.

Dari Gambar 4(a) dapat dilihat bahwa grafik PACF cenderung *cut-off* mulai *lag* ketiga dan terdapat tiga *lag yang signifikan*. Jadi, model yang cocok adalah proses $AR(3)$. Jadi, jika dimisalkan data Inflasi Indonesia (%) setelah dilakukan *differencing* sebagai $Y_1, Y_2, \dots, Y_{96}$, maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$PY_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \beta_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t, \quad t = 4, \dots, 96 \tag{18}$$

Pada grafik fungsi autokorelasi data *differencing* Gambar 3(b) pada data harga emas diperoleh nilai autokorelasi *lag* 1 berada diluar batas signifikanya yang artinya terdapat hubungan yang signifikan antara nilai antara satu variabel dengan variabel lain. Pada autokorelasi *lag* berada direntang batas signifikannya yang artinya tidak ada hubungan yang signifikan antara satu variabel dengan variabel lainnya. Karena *lag* 2 dan *lag* 3 tidak berbeda signifikan, maka data stasioner pada *diffrenecing* satu. Untuk memperjelas bahwa data stasioner atau, maka dapat dilakukan uji stasioner dengan Uji ADF. Adapun hasil uji ADF yang diperoleh sebesar -4,6565 dengan p-value sebesar 0.01. Nilai Kritis Mackinnon pada taraf $\alpha =$ 5% adalah -3,487845. Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa $|t| >$ nilai mutlak statistik-t untuk nilai kritis Mackinnon $(|-5{,}6565| > |-3{,}48785|)$. Pada p-value juga dapat dilihat bahwa p-value $< \alpha = (0{,}01 < 0{,}05)$. Jadi dapat disimpulkan H_0 ditolak yang artinya data inflasi Indonesia yang telah dilakukan *differencing* sebanyak satu kali tidak mengandung unit root. Artinya data tersebut stasioner.

Dari Gambar 4(b) dapat dilihat bahwa grafik PACF cenderung *cut-off* mulai *lag* ketiga dan terdapat tiga *lag yang signifikan*. Jadi, model yang cocok adalah proses *AR*(1). Jadi, jika dimisalkan data Inflasi Indonesia (%) setelah dilakukan *differencing* sebagai $Y_1, Y_2, \dots, Y_{96}$, maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$PY_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, \dots, 100 \tag{19}$$

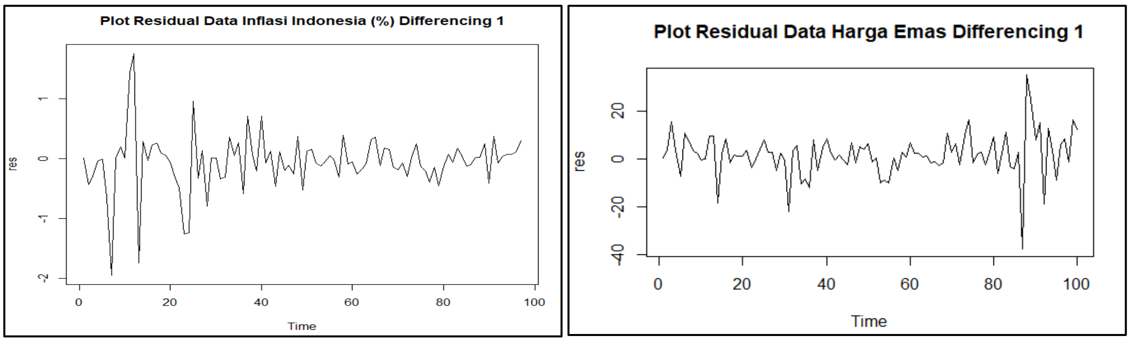
II.3 Uji ARCH-LM

Uji ARCH-LM merupakan alat uji untuk melihat efek heteroskedastisitas. ARCH dapat diterapkan. Jika tidak mengandung heteroskedastisitas maka model yang sesuai adalah model AR. Suatu model AR mengandung heteroskedastisitas jika $TR^2 > x_p^2\,(\alpha)$ atau $prob\ x_p^2 < \alpha$. Pada data inflasi hasil uji ARCH-LM. Berdasarkan hasil uji ARCH-LM dengan *Software R* diperoleh bahwa nilai $R^2 = 63{,}811$ sehingga diperoleh $TR^2 = 96(63{,}881) = 6132{,}576$. Dari hasil diatas diperoleh x_p^2 pada α = 5% dengan $df = 96 - 1 = 95$ sebesar 118,752. Karena $TR^2 > x_p^2$ maka dapat disimpulkan bahwa data Inflasi Indonesia (%) mengandung efek heteroskedastisitas dan model ARCH dapat digunakan.

Pada data harga emas hasil uji ARCH-LM. Berdasarkan hasil uji ARCH-LM dengan *Software R* diperoleh bahwa nilai $R^2 = 31{,}374$ sehingga diperoleh $TR^2 = 100(31{,}374\,) =$ 3137.4. Dari hasil diatas diperoleh x_p^2 pada α = 5% dengan $df = 100 - 1 = 99$ sebesar 123,225. Karena $TR^2 > x_p^2$ maka dapat disimpulkan bahwa data Harga enmas mengandung efek heteroskedastisitas dan model ARCH dapat digunakan.

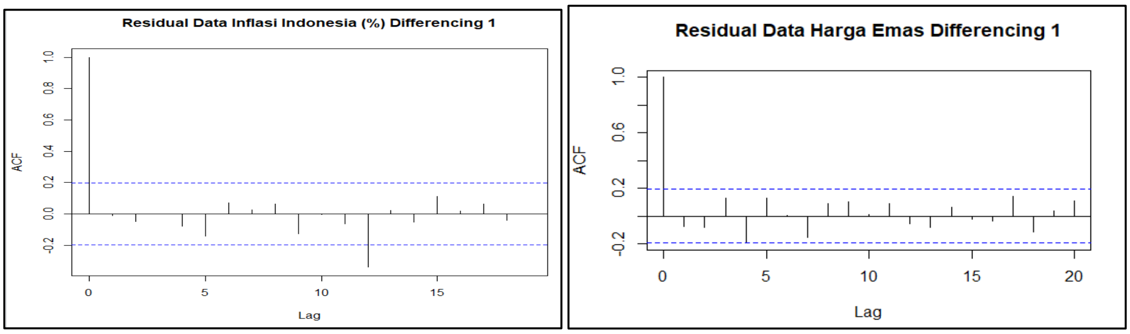
Berikut adalah grafik ACF dan PACF residual data Inflasi Indonesia dan data harga emas *differencing* sebanyak 1 kali:

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 2 (NOV 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id



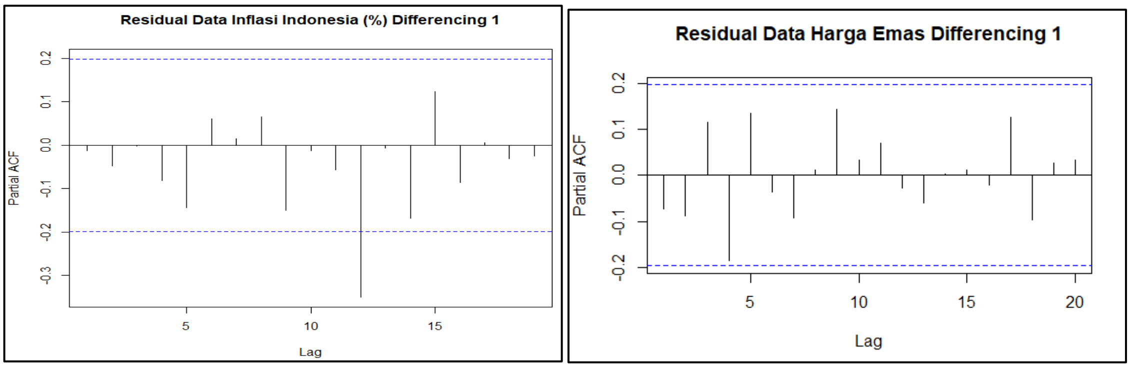
(a) (b)

Gambar 5. Plot Residual Data Inflasi Indonesia (a) dan Data Harga Emas (b) setelah dilakukan *differencing* sebanyak 1 kali



(a) (b)

Gambar 6. Plot ACF Residual Data Inflasi Indonesia (a) dan Data Harga Emas (b) setelah dilakukan *differencing* sebanyak 1 kali



(a) (b)

Gambar 7. Plot PACF Residual Data Inflasi Indonesia (a) dan Harga Emas (b) setelah dilakukan *differencing* sebanyak 1 kali

Berdasarkan Gambar 7(a) dapat dilihat bahwa koefisien autokorelasi *lag* 12 berada tidak berada di rentang batas signifikan yang artinya terdapat hubungan yang signifikan antara satu variabel dengan variabel lain. Model ARCH terbaik untuk data Inflasi Indonesia (%) yaitu model ARCH (1). Maka model yang sesuai adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + u_t}, \quad t = 2,3,\dots,96 \tag{20}$$

Berdasarkan Gambar 7(b) dapat dilihat bahwa koefisien autokorelasi *lag* 5 berada tidak berada di rentang batas signifikan yang artinya terdapat hubungan yang signifikan antara satu variabel dengan variabel lain. Model ARCH terbaik untuk data harga emas yaitu model ARCH (1). Maka model yang sesuai adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + u_t}, \; t = 2,3, \dots ,100 \tag{21}$$

II.4 Estimasi Parameter Pada Model ARCH Menggunakan Metode Maksimum Likelihood

Berdasarkan hasil identifikasi data tersebut telah diketahui model dari data. Langkah berikutnya adalah melakukan estimasi parameter dari model yang telah diperoleh. Dengan bantuan program R pada metode maksimum likelihood dari turunan parsial terhadap nilai error maka diperoleh estimator sebagai berikut:

```
Call:
garch(x = data, order = c(p, 0), trace = F)

Coefficient(s):
    a0      b1
6.2177  0.6148

mean = 0.9165872 Standard Deviasi = 0.4469721'log Lik.' -271.4201 (df=2)
```

(a)

```
Call:
garch(x = data, order = c(p, 0), trace = F)

Coefficient(s):
      a0        b1
838.6946    0.9981

mean = 0.8497085 Standard Deviasi = 0.04392558'log Lik.' -768.4896 (df=2)
```

(b)

Gambar 8. Output Estimasi Parameter ARCH Data Inflasi (a) dan Data Harga Emas (b) Menggunakan Metode Maksimum Likelihood

II.5 Estimasi Parameter Pada Model ARCH(1) Menggunakan Metode Bayes

Langkah berikutnya adalah penaksiran parameter dari model yang telah didapatkan. Dari model dan data yang diperoleh akan dianalisis untuk mengpenaksiran parameter menggunakan metode Bayes dengan simulasi MCMC. Pada penelitian ini digunakan *software R* untuk melakukan simulasi. Dari hasil 10 simulasi menggunakan metode Bayes pada data inflasi diperoleh estimator $\alpha_0$dan α_1 adalah 0,4252 dan 0,6020. Setelah diperoleh estimasi parameter kemudian diperoleh mean residual dari metode Bayes sebesar 0,4372. Dari hasil 10 simulasi menggunakan metode Bayes pada data harga emas diperoleh estimator $\alpha_0$dan α_1 adalah 8.28543 dan 0,964174. Setelah diperoleh estimasi parameter kemudian diperoleh mean residual dari metode Bayes sebesar 0,411449. Nilai estimasi mean residual menggunakan metode Bayes adalah sebagai berikut:

Tabel 1 Estimasi *Mean* Residual dan Standard Deviasi Menggunakan Metode Bayes

Run	Data Inflasi		Data Harga Emas	
	Mean Residual ($\hat{\mu}_\varepsilon$)	Standard Deviasi ($\hat{\sigma}_\varepsilon$)	Mean Residual ($\hat{\mu}_\varepsilon$)	Standard Deviasi ($\hat{\sigma}_\varepsilon$)
1	0,6533	0,2822	0.841	0.10149
2	0,1246	0,1104	0.254	0.16049
3	0,7364	0,3667	0.437	0.14209
4	0,6879	0,2109	0.6103	0.12467

5	0,6721	0,2779	0.1912	0.1668
6	0,4189	0,2531	0.81751	0.10385
7	0,4202	0,4260	0.2121	0.16469
8	0,1142	0,2171	0.167	0.1695
9	0,4954	0,3951	0.5545	0.13029
10	0,0496	0,1324	0.02988	0.18301
Rata-rata	0,4372	0,2671	0.411449	0.144688

II.6 Perbandingan Estimasi Parameter Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes

Setelah diperoleh penaksiran parameter selanjutnya ditentukan nilai bias dan MSE (*Mean Square Error*) dari metode tersebut. Nilai penaksiran *mean, mean square error*, dan bias menggunakan metode Bayes adalah sebagai berikut:

Tabel 2. Perbandingan Estimasi *Mean* Residual dan Standard Deviasi Menggunakan Metode Bayes dan Maksimum Likelihood

Data Inflasi				Data Harga Emas			
Bayes		MLE		Bayes		MLE	
$\hat{\mu}_\varepsilon$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	$\hat{\mu}_\varepsilon$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	$\hat{\mu}_\varepsilon$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	$\hat{\mu}_\varepsilon$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
0,4372	0,2671	0,9166	0,4470	0,41145	0,14469	0,84971	0.0439

Pada data inflasi berdasarkan Tabel 2 diperoleh rata-rata hasil estimasi *mean* residual menggunakan metode Bayes adalah 0,4372. Sedangkan estimasi *mean* residual menggunakan metode Maksimum Likelihood adalah 0,9166. Dapat dilihat bahwa nilai *mean* residual metode Bayes lebih kecil dari metode Maksimum Likelihood. Sedangkan hasil estimasi *standard error* pada metode Bayes diperoleh nilai *standard error* sebesar 0,0272 dan pada metode MLE sebesar 0,0456. Pada data harga emas berdasarkan Tabel 2 diperoleh rata-rata hasil estimasi *mean* residual menggunakan metode Bayes adalah 0,41145. Sedangkan estimasi *mean* residual menggunakan metode Maksimum Likelihood adalah 0,84971. Sedangkan hasil estimasi *standard error* pada metode Bayes diperoleh nilai *standard error* sebesar 0,14469 dan pada metode MLE sebesar 0,0439. Dapat dilihat bahwa nilai *mean* residual metode Bayes lebih kecil dari metode Maksimum Likelihood. Berdasarkan hasil tersebut didapati bahwa *standard error* menggunakan metode Bayes lebih kecil dibandingkan metode MLE. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa metode bayes pada model ARCH lebih baik digunakan pada kasus tersebut. Hal ini dikarenakan pada metode Bayes, parameter diberlakukan sebagai variabel. Pemilihan prior yang tepat merupakan salah satu faktor yang membuat nilai dari *mean* residual metode Bayes lebih kecil dibandingkan metode Maksimum Likelihood.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya dapat dlihat bahwa metode Bayes tidak memerlukan asumsi normalitas. Hal ini ditunjukkan dengan penggunaan distribusi priornya yang berdistribusi eksponensial. Pada simulasi data menggunakan model ARCH diperoleh hasil estimasi *mean* residual menggunakan metode Bayes adalah 0,4372. Sedangkan estimasi *mean* residual menggunakan metode Maksimum Likelihood adalah 0,9166. Pada metode Bayes diperoleh nilai estimasi *standard error* sebesar 0,0272 dan pada metode Maksimum

Likelihood sebesar 0,0456. Dari analisis penelitian ini menunjukkan bahwa estimasi parameter dengan menggunakan metode Bayes baik digunakan pada model ini. Hal ini didukung dengan kecilnya nilai estimasi *mean* residual dan *standard error* menggunakan metode Bayes dibandingkan dengan menggunakan metode Maksimum Likelihood.

REFERENSI

[1] R. J, Larsen dan M. L. Marx, *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*. Fifth Edition. Prentice Hall, 2018.
[2] P. Congdon, *Applied Bayesian Modelling*. Canada: John Willey and Sons, 2014.
[3] A. Widarjono, *Ekonometrika: Teori dan Aplikasi untuk Ekonomi dan Bisnis*. Yogyakarta: Penerbit Ekonosia UII, 2005
[4] A. P. Desvina dan I. O. Meijer. Penerapan Model ARCH/GARCH untuk Peramalan Nilai Tukar Petani. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, *4*(1), 43-54. 2018.
[5] M. I. Rizki, T. A. Taqiyyuddin, P. F. Rahmah dan A. E. Hasana. Penerapan Model ARCH/GARCH untuk Memprediksi Harga Saham Perusahaan Tokai Carbon. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, *7*(2), 50-61.(2021).
[6] R. H. Simatupang dan Sutarman, ARIMA Model Parameter Estimation Using Bayes Method, *JOMTE*, 2022
[7] K. R. Katianda, R. Goejantoro, dan A. M. A. Satriya. Estimasi Parameter Model Regresi Linier dengan Pendekatan Bayes. *EKSPONENSIAL*, *11*(2), 127-132. 2021
[8] G. E. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, dan G. M. Ljung, *Time series analysis: forecasting and control*. Canada: John Wiley & Sons, 2015
[9] W. W. Winarno. 2017. *Analisis Ekonometrika dan Statistika dengan Eviews*. Yogyakarta: STIM YKPN
[10] Gujarati, D. 2007. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Terjemahan Sumarno Zain. Jakarta: Erlangga
[11] S. Makridakis, S. C. Wheelwright, dan V. E. McGee. Metode dan Aplikasi Peramalan, Jilid 1 Edisi Revisi (terj.). *Binarupa Aksara. Jakarta*.2003
[12] Aswi dan Sukarna. *Analisis Deret Waktu*. Makassar : Penerbit Andira2006.
[13] R. Tsay, *Analysis of financial time series wiley series probability and statistic*. Third Edition. John wiley & sons. 2010
[14] G. E. Box dan G. C. Tiao, *Bayesian inference in statistical analysis*. Canada: John Wiley & Sons, 2011.
[15] D. Gamerman dan H. F. Lopes, *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. CRC Press. 2006
[16] G. Casella dan R. L. Berger, *Statistical inference*. Cengage Learning, 2021.