JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 5 NO. 1 (JUN 2022)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

BEBERAPA KELAS RUANG BARISAN SELISIH DIPERUMUM TIPE CESARO

Mizan Ahmad[1*]

[1] *Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali Cilacap*
Email: [1]mizan.ahmad36@mail.com
*Penulis Korespondensi

Abstract. In this paper, we discuss about some classes of Cesaro Generalized difference sequence spaces. We observe their completeness and the relationships between them. At the end of this paper, we construct the Kothe-Toeplitz dual of some class of Cesaro difference sequence spaces.
Keywords: normed spaces, Cesaro difference sequences, Kothe-Toeplitz dual.
Abstrak. Pada tulisan ini dibahas mengenai beberapa kelas ruang barisan selisih Cesaro. Diselidiki kelengkapan masing-masing kelas dan hubungan antar kelas. Pada akhir tulisan ini, dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz dari beberapa kelas ruang barisan selisih Cesaro.
Kata Kunci: Ruang bernorma, barisan selisih Cesaro, dual Köthe-Toeplitz.

I. PENDAHULUAN

Ruang barisan merupakan salah satu konsep dalam matematika yang banyak dipelajari dan dikembangkan. Beberapa ruang barisan yang sudah dikenal di antaranya ruang barisan terbatas, ruang barisan p-*absolutely summable*, ruang barisan *absolutely summable*, ruang barisan konvergen, ruang barisan konvergen ke nol, dan ruang barisan Cesaro. Konsep barisan Cesaro dikenalkan oleh Ernesto Cesaro dengan mengenalkan rata-rata Cesaro (Cesaro *means*) dari suatu barisan.

Diberikan $\omega(R) = \{x = (x_k) : x_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$ dan $n \in \mathbb{N}$. Ruang barisan Cesaro

$$C_p = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(R) :\| x \|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

dan

$$C_\infty = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(R) :\| x \|_\infty = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| < \infty\}$$

dikenalkan dalam Shiue [10]. Hasilnya, $l_p \subset Ces_p(1 < p < \infty)$. Ng dan Lee [8] mengenalkan ruang barisan Cesaro tipe non-absolute, yaitu

$$X_p = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(R) :\| x \|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

dan

$$X_\infty = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(R) :\| x \|_\infty = \sup_n |\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k| < \infty\}.$$

Dalam penelitian tersebut didapatkan, $Ces_p \subset X_p, 1 \leq p < \infty$.

Selanjutnya, Orhan [9] mengenalkan ruang barisan selisih Cesaro $X_p(\Delta)$ dan $X_\infty(\Delta)$ dengan mengganti $x = x_k$ menjadi $\Delta x = \Delta(x_k) = (x_k - x_{k+1}), k = 1, 2, ...$ Lebih lanjut, Orhan [9] mendefinisikan ruang barisan selisih Cesaro $X_p(\Delta)$ dan $X_\infty(\Delta)$ dengan

$$O_p(\Delta) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(R) : \| x \|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

dan

$$O_\infty(\Delta) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(R) : \| x \|_\infty = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\Delta x_k| < \infty\}.$$

Dari penelitian tersebut didapatkan $X_p \subset X_p(\Delta)$, $X_\infty \subset X_\infty(\Delta)$, $O_p(\Delta) \subset X_p(\Delta)$ dan $O_\infty(\Delta) \subset X_\infty(\Delta)$, untuk $1 \leq p < \infty$. Selanjutnya, Et [3] mendefinisikan dan meneliti ruang barisan

$$C_p(\Delta^m) = \left\{ \bar{x} = (x_k) \in \omega(R) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^m x_k| \right)^p < \infty, \text{untuk } 1 \leq p < \infty \right\},$$

dan

$$C_\infty(\Delta^m) = \left\{ \bar{x} = (x_k) \in \omega(R) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^m x_k| < \infty \right\},$$

untuk $m \in \mathbb{N}$. Dari penelitian tersebut disimpulkan bahwa $C_p(\Delta^{m-1}) \subset C_p(\Delta^m)$ dan $C_p(\Delta^m) \subset C_q(\Delta^m)$, untuk $1 \leq p < q < \infty$. Lebih lanjut, untuk barisan kompleks tidak nol $g = (g_k)$, Et dan Esi [7] mendefinisikan barisan selisih

$$X(\Delta_g^m) = \{x = (x_k) \in \omega(R) : \Delta_g^m x_k \in X\},$$

dengan $X = l_\infty, c, c_0$ dan $\Delta_g^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} x_{k+v} g_{k+v}$. Dari penelitian tersebut didapatkan $X(\Delta_g^m) \subset X(\Delta_g^{m+1})$. Selain itu, B. C. Tripathy *et al.* [2] meneliti $Z(\Delta_m^n)$, untuk $Z = C_\infty, O_\infty, C_p, O_p, l_p$, dengan $X = l_\infty, c, c_0$ dan $\Delta_m^n x_k = \sum_{v=0}^{n} (-1)^n \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} x_{k+mv}$. Dari penelitian tersebut didapatkan $Z(\Delta_m^{n-1}) \subset Z(\Delta_m^n)$. Adapun, A. H. Ganie *et al.* [1] meneliti $Z(\Delta_m^n, \theta)$ dan $Z[\Delta_m^n, \theta]$, untuk $Z = C_{(\infty)}, C_{(p)}$. Dari penelitian tersebut didapatkan $C_{(p)}(\Delta_m^{n-1}, \theta) \subset C_{(p)}(\Delta_m^n, \theta)$ dan $C_{(p)}[\Delta_m^{n-1}, \theta] \subset C_{(p)}[\Delta_m^n, \theta]$.

Pada tulisan ini digunakan notasi C_p sebagai X_p dan C_∞ sebagai X_∞. Selanjutnya, untuk X ruang barisan bilangan real, ruang bernorma $(X, \| \cdot \|)$ disebut ruang BK jika $(X, \| \cdot \|)$ merupakan ruang Banach dan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, fungsi $P_k : X \to R$ dengan definisi $P_k(x) = x_k,$ dengan $x = (x_k)$ merupakan fungsi kontinu.

Terdapat banyak ruang dual yang sering diteliti berkaitan dengan ruang barisan, beberapa diantaranya dibahas dalam Garling [5]. Pada tulisan ini hanya dibahas untuk ruang dual Köthe-Toeplitz. Dual Köthe-Toeplitz dari ruang barisan E dinotasikan $[E]^\alpha$ dengan $[E]^\alpha = \{y = (y_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty, \text{ untuk setiap } x = x(k) \in E\}$. Penelitian tentang dual Köthe-Toeplitz dari suatu ruang barisan dapat ditemukan dalam Et dan Çolak [4], Et [3], serta Kizmaz [6].

Pada tulisan ini, dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz dari beberapa kelas ruang barisan selisih Cesaro.

II. RUANG BARISAN SELISIH DIPERUMUM CESARO

Berikut ini didefinisikan beberapa kelas barisan selisih diperumum Cesaro.

Definisi 1 *Diberikan* $\omega(R) = \{x = (x_k) : x_k \in \mathbb{R},$ *untuk setiap* $k \in \mathbb{N}\}$. *Untuk suatu* $m \in \mathbb{N}$, $g = (g_k)$ *barisan bilangan real tidak nol, dan* $1 \leq p < \infty$ *didefinisikan*

$$C_p(\Delta_g^m) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^p < \infty\},$$

$$C_\infty(\Delta_g^m) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right) < \infty\},$$

$$l_p(\Delta_g^m) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\Delta_g^m x_k| \right)^p < \infty\},$$

$$O_p(\Delta_g^m) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} |\Delta_g^m x_k| \right)^p < \infty\},$$

$$O_\infty(\Delta_g^m) = \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : \sup_i \left(\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} |\Delta_g^m x_k| \right) < \infty\}$$

dengan

$$\Delta_g^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} g_{k+v}.$$

Dari definisi tersebut diperoleh kelengkapan dari masing-masing ruang barisan adalah sebagai berikut

Teorema 1 *Diberikan* $1 \leq p < \infty$.

1. *Ruang* $C_\infty(\Delta_g^m)$ *merupakan ruang Banach terhadap norma yang didefinisikan sebagai berikut*
$$\| x \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} = \sum_{k=1}^{m} |x_k g_k| + \sup_i |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k|.$$
2. *Ruang* $O_\infty(\Delta_g^m)$ *merupakan ruang Banach terhadap norma yang didefinisikan sebagai berikut*
$$\| x \|_{O_\infty}^{\Delta_g^m} = \sum_{k=1}^{m} |x_k g_k| + \sup_i \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} |\Delta_g^m x_k|.$$
3. *Ruang* $l_p(\Delta_g^m)$ *merupakan ruang Banach terhadap norma yang didefinisikan sebagai*

berikut

$$\| x \|_{l_p}^{\Delta_g^m} = \sum_{k=1}^{m} |x_k g_k| + (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_g^m x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

4. *Ruang $C_p(\Delta_g^m)$ merupakan ruang Banach terhadap norma yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x \|_{C_p}^{\Delta_g^m} = \sum_{k=1}^{m} |x_k g_k| + (\sum_{i=1}^{\infty} |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

5. *Ruang $O_p(\Delta_g^m)$ merupakan ruang Banach terhadap norma yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\| x \|_{O_p}^{\Delta_g^m} = \sum_{k=1}^{m} |x_k g_k| + (\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} |\Delta_g^m x_k|)^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Bukti. 1. Mudah ditunjukkan bahwa $C_\infty(\Delta_g^m)$ merupakan ruang bernorma terhadap norma yang bersesuaian. Selanjutnya, akan ditunjukkan $C_\infty(\Delta_g^m)$ ruang Banach.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $(x^s) = (x_i^s) = (x_1^s, x_2^s, ...)$ barisan Cauchy di dalam $C_\infty(\Delta_g^m)$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk setiap $s, t \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} &\|x^s - x^t \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k^t) g_k| + \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t)| \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Akibatnya, untuk setiap $s, t \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k^t) g_k| < \varepsilon \tag{1}$$

dan

$$\sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t)| \right) < \varepsilon, \tag{2}$$

untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Dengan demikian untuk setiap $k = 1, ..., m$ dan $s, t \geq n_0$, berlaku $|(x_k^s - x_k^t) g_k| < \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $k = 1, ..., m$, $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Dengan demikian barisan $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ konvergen, katakan ke $x_k \in \mathbb{R}$, untuk $k = 1, ..., m$. Dengan kata lain

$$\lim_{s \to \infty} x_k^s = x_k, \text{ untuk } k = 1, ..., m. \tag{3}$$

Selanjutnya, dipunyai $\sup_i |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t)| < \varepsilon$, untuk setiap $s, t \geq n_0$ dan untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Karena berlaku untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, maka didapatkan $(\Delta_g^m (x_k^s))_{s=1}^\infty$ merupakan barisan Cauchy di C_∞ yang lengkap. Akibatnya, $(\Delta_g^m (x_k^s))_{s=1}^\infty$ konvergen, katakan ke $y = (y_k) \in C_\infty$, sehingga diperoleh $\lim_{s \to \infty} \Delta_g^m (x_k^s) = y_k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Untuk $k = 1$ didapatkan

$$\begin{aligned} y_1 = \lim_{s\to\infty} \Delta_g^m(x_1^s) &= \lim_{s\to\infty} \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{1+v}^s g_{1+v} \\ &= \lim_{s\to\infty} \left(\sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \binom{m}{v} x_{1+v}^s g_{1+v} + (-1)^m x_{1+m} g_{1+m} \right) \\ &= \sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \binom{m}{v} \lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s g_{1+v} + (-1)^m \lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s g_{1+m}. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{s\to\infty} x_k^s = x_k$, untuk setiap $k = 1, ..., m$, maka $\lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s = x_{1+v}$, untuk $v = 1, ..., m-1$. Karena $\lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s$ ada dan $\sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v \binom{m}{v} \lim_{s\to\infty} x_{1+v}^s g_{1+v}$ ada, maka diperoleh $\lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s$ ada, katakan $x_{1+m} = \lim_{s\to\infty} x_{1+m}^s$.
Proses tersebut dilanjutkan untuk $k = 2, 3, 4, ...$, sehingga diperoleh

$$x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^s, \text{ untuk setiap } k > m. \tag{4}$$

Berdasarkan 3 dan 4 didapatkan

$$x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^s, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

dan

$$\Delta_g^m x_k = \lim_{s\to\infty} \Delta_g^m x_k^s, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

Selanjutnya, berdasarkan 1 dan 2, untuk setiap $s \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k) g_k| = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k^t) g_k| < \varepsilon$$

dan

$$\sup_i |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k)| = \lim_{t\to\infty} \sup_i |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k^t)| < \varepsilon.$$

Dibentuk $x = (x_k)$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in C_\infty(\Delta^m)$. Untuk setiap $s \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right) &\leq \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k - x_k^s)| \right) \\ &\quad + \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k^s| \right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Jadi, $x \in C_\infty(\Delta_g^m)$. Selanjutnya, untuk setiap $s \geq n_0$ berlaku

$$\| x^s - x \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} = \sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k)g_k| + \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k)| \right) < 2\varepsilon$$

Dengan demikian, $C_\infty(\Delta_g^m)$ ruang Banach terhadap norma $\| \cdot \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m}$.

2. Bukti mengikuti (1).
3. Bukti mengikuti (1).
4. Bukti mengikuti (1).
5. Bukti mengikuti (1).

□

Lebih lanjut, diperoleh teorema berikut.

Teorema 2 *Ruang $Z(\Delta_g^m)$ merupakan ruang BK, dengan $Z = l_p, C_p, O_p, l_\infty, C_\infty, O_\infty$, untuk $1 \leq p < \infty$.*

Bukti. Ditunjukkan untuk $Z = C_\infty$. Untuk kelas yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama.

Diambil sebarang barisan (x^s) yang konvergen, maka terdapat $x \in C_\infty(\Delta_g^m)$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned} &\| x^s - x \|_{C_\infty}^{\Delta_g^m} \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \\ \Leftrightarrow &\sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k)g_k| + \sup_i |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k)| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\sum_{k=1}^{m} |(x_k^s - x_k)g_k| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \tag{5}$$

dan

$$\sup_i |\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m (x_k^s - x_k)| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \tag{6}$$

Dari 5 diperoleh

$$|(x_k^s - x_k)g_k| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \text{ dan untuk } k = 1, ..., m. \tag{7}$$

Dengan kata lain

$$\lim_{s \to \infty} x_k^s = x_k \text{ untuk } k = 1, ..., m.$$

Dari 6 diperoleh

$$|\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\Delta_g^m(x_k^s - x_k)| \to 0, \text{ untuk } s \to \infty \text{ dan untuk setiap } i \in \mathbb{N}.$$

Dengan kata lain

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\Delta_g^m(x_k^s - x_k) = 0 \text{ untuk setiap } i \in \mathbb{N}.$$

Karena

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty}\Delta_g^m(x_k^s - x_k) &= \lim_{s\to\infty}\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\tbinom{m}{v}(x_{k+v}^s - x_{k+v})g_k \\
&= \lim_{s\to\infty}\left(\sum_{v=0}^{m-1}(-1)^v\tbinom{m}{v}(x_{k+v}^s - x_{k+v})g_k + (-1)^m(x_{k+m}^s - x_{k+m})g_k\right) \\
&= \sum_{v=0}^{m-1}(-1)^v\tbinom{m}{v}\lim_{s\to\infty}(x_{k+v}^s - x_{k+v})g_k + (-1)^m\lim_{s\to\infty}(x_{k+m}^s - x_{k+m})g_k,
\end{aligned}$$

maka untuk $k = 1$ diperoleh

$$\lim_{s\to\infty}x_{1+m}^s = x_{1+m}.$$

Proses dilanjutkan untuk $i = 2, 3, ...$, sehingga diperoleh

$$\lim_{s\to\infty}x_k^s = x_k \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

Jadi, $C_\infty(\Delta_g^m)$ merupakan ruang BK. □

Berikut hubungan antar kelas barisan selisih Cesaro.

Teorema 3 *Ruang $Z(\Delta_g^{m-1}) \subset Z(\Delta_g^m)$, dengan $Z = l_p, C_p, O_p, l_\infty, C_\infty, O_\infty$, untuk $1 \le p < \infty$. Lebih lanjut, $Z(\Delta_g^i) \subset Z(\Delta_g^m)$, untuk $i = 1, ..., m-1$.*

Bukti. Ditunjukkan untuk $Z = C_\infty$. Untuk kelas yang lain, bukti menggunakan teknik yang sama.

Diambil sebarang $x = (x_k) \in C_\infty(\Delta_g^{m-1})$, maka berlaku

$$\sup_i\left(|\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}\Delta_g^{m-1}x_k|\right) < \infty.$$

Karena $\Delta_g^m x_k = \Delta_g^{m-1} x_k - \Delta_g^{m-1} x_{k+1}$, maka untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right) \leq \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^{m-1} x_k| \right) + \sup_i \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^{m-1} x_{k+1}| \right).$$

Jadi, $C_\infty(\Delta_g^{m-1}) \subset C_\infty(\Delta_g^m)$. Lebih lanjut, untuk $m \geq 2$ berlaku

$$C_\infty(\Delta_g^1) \subset C_\infty(\Delta_g^2) \subset ... \subset C_\infty(\Delta_g^{m-1}) \subset C_\infty(\Delta_g^m).$$

Dengan demikian untuk $i = 1, 2, ..., m-1$ diperoleh $C_\infty(\Delta_g^i) \subset C_\infty(\Delta_g^m)$. □

Teorema 4 *Jika* $1 \leq p < \infty$*, maka*

1. $l_p(\Delta_g^m) \subset l_\infty(\Delta_g^m) \subset O_\infty(\Delta_g^m)$,
2. $O_p(\Delta_g^m) \subset C_p(\Delta_g^m) \subset C_\infty(\Delta_g^m)$*, dan*
3. $O_p(\Delta_g^m) \subset O_\infty(\Delta_g^m) \subset C_\infty(\Delta_g^m)$.

Bukti. 1. Diambil sebarang $x = (x_k) \in l_p(\Delta_g^m)$, dengan $1 \leq p < \infty$, maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_g^m x_k|^p < \infty.$$

Akibatnya ada $M > 0$ sehingga berlaku $|\Delta_g^m x_k| < M$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, $\sup_k |\Delta_g^m x_k| < M < \infty$. Jadi, $l_p(\Delta_g^m) \subset l_\infty(\Delta_g^m)$.

Selanjutnya, diambil sebarang $(x_k) \in l_\infty(\Delta_g^m)$, maka berlaku $\sup_k |\Delta_g^m x_k| < \infty$. Dengan demikian ada $M > 0$ sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ berlaku $|\Delta_g^m x_k| < M$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\sup_i \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} |\Delta_g^m x_k| < M.$$

Jadi, $l_\infty(\Delta_g^m) \subset O_\infty(\Delta_g^m)$.

2. Bukti mengikuti (1).

3. Bukti mengikuti (1).

□

Teorema 5 *Jika* $1 \leq p < q$*, maka*

1. $C_p(\Delta_g^m) \subset C_q(\Delta_g^m)$,
2. $O_p(\Delta_g^m) \subset O_q(\Delta_g^m)$*, dan*
3. $l_p(\Delta_g^m) \subset l_q(\Delta_g^m)$.

Bukti. 1. Diambil sebarang $x = (x_k) \in C_p(\Delta_g^m)$, dengan $1 \leq p < q$, maka berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^p < \infty,$$

sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^p < \varepsilon. \tag{8}$$

Karena $1 \leq p < q$, maka untuk setiap $i \geq n_0$ dan $0 < \varepsilon < 1$ berlaku

$$\left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^q < \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^p < \varepsilon < 1. \tag{9}$$

Oleh karena itu, berdasarkan 8 dan 9 didapatkan

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^q < \sum_{i=n_0}^{\infty} \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^p < \varepsilon.$$

Dengan demikian,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} \Delta_g^m x_k| \right)^q < \infty.$$

Jadi, $C_p(\Delta_g^m) \subset C_q(\Delta_g^m)$, untuk $1 \leq p < q$.

2. Bukti mengikuti (1).

3. Bukti mengikuti (1).

□

III. DUAL KÖTHE-TOEPLITZ

Pada bagian ini, dibahas dual Köthe-Toeplitz untuk ruang $l_\infty(\Delta_g^m)$, $O_\infty(\Delta_g^m)$, dan $C_\infty(\Delta_g^m)$. Berdasarkan Garling [5], jika X dan Y ruang barisan dengan $X \subset Y$, maka $[Y]^\alpha \subset [X]^\alpha$. Selanjutnya, didefinisikan

$$SZ(\Delta_g^m) = \{x = (x_k) : x \in Z(\Delta_g^m), x_1 = ... = x_m = 0\}, \text{ dengan } Z = l_\infty, C_\infty, O_\infty$$

dan

$$U = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k g_k^{-1}| < \infty\}.$$

Lemma 1 *Jika* $x \in SC_\infty(\Delta_g^m)$, *maka* $\sup_k k^{-m}|x_k g_k| < \infty$.

Bukti. Bukti mengikuti Akibat 2.3. pada Et [3] dengan mengganti Δ^m dengan Δ_g^m. □

Teorema 1 $[Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha = U$.

Bukti. Jika $a \in U$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k g_k^{-1}| < \infty$, artinya ada $M_1 > 0$ sehingga berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k g_k^{-1}| < M_1$. Berdasarkan Lema 1 maka ada $M_2 > 0$ sehingga $k^{-m}|x_k g_k| < M_2$, untuk setiap $x_k \in Sl_\infty(\Delta_g^m)$. Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k g_k^{-1}| k^{-m} |x_k g_k| \\ &< M_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k g_k^{-1}| \\ &< M_2 M_1 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Jadi, $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$.

Selanjutnya, jika $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k| < \infty,$$

untuk setiap $(x_k) \in Sl_\infty(\Delta_g^m)$. Dibentuk barisan $x = (x_k)$ dengan

$$|x_k g_k| = \begin{cases} 0, k \leq m \\ k^m, k > m. \end{cases}$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k g_k^{-1}| \\ &\quad = \sum_{k=1}^{m} k^m |a_k g_k^{-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k g_k| \;\; |a_k g_k^{-1}| \\ &\quad < \infty.\end{aligned}$$

Dengan demikian, $a \in U$. □

Teorema 2 $[Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha = [l_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$.

Bukti. Diketahui $Sl_\infty(\Delta_g^m) \subset l_\infty(\Delta_g^m)$, maka diperoleh

$$[l_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha \subset [Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha.$$

Diambil sebarang $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$ dan $x = (x_k) \in l_\infty(\Delta_g^m)$. Karena $a \in [Sl_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$, maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k y_k| < \infty,$$

untuk setiap $(y_k) \in Sl_\infty(\Delta_g^m)$. Selanjutnya dibentuk barisan $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ dengan

$$\bar{x}_k = \begin{cases} 0, k \leq m \\ x_k, k > m, \end{cases}$$

maka $\bar{x} \in Sl_\infty(\Delta_g^m)$. Akibatnya, didapatkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{m} |a_k x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \bar{x}_k| < \infty.$$

Dengan demikian, $a \in [l_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$. □

Teorema 3 $U = [l_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha = [O_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha = [C_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1 dan 2 diperoleh bahwa $U = [l_\infty(\Delta_g^m)]^\alpha$. Selanjutnya, untuk kelas $C_\infty(\Delta_g^m)$ dan $O_\infty(\Delta_g^m)$, bukti menggukan teknik yang sama. □

IV. KESIMPULAN

Pada tulisan ini, dikonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk $l_\infty(\Delta_g^m)$, $C_\infty(\Delta_g^m)$, dan $O_\infty(\Delta_g^m)$. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengkonstruksikan dual Köthe-Toeplitz untuk kelas yang lain.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada penilai yang telah memberikan saran.

REFERENSI

[1] A. H. Ganie, S. A. Lone, dan A. Afroza, Generalised Difference Sequence Spaces of Non-absolute Type, *EKSAKTA* **11** 2 (2020), 147-153.

[2] B. C. Tripathy, A. Esi, dan B. K. Tripathy, On A New Type of Generalized Difference Cesaro Sequence Spaces, *Soochow J. Mat.* **31** 3 (2005), 333-340.

[3] Et, M., On Some Generalized Cesaro Difference Sequence Spaces, *Istanbul Univ. Fen Fak. Mat. Dergrisi* **55-56** (1996-1997), 221-229.

[4] Et, M. dan Çolak, R., On Some Generalized Diffeerence Sequence Spaces, *Soochow J. Math.* **21** (1995), 377-386.

[5] Garling, D.J. H., The β- and γ-duality of Sequence Spaces, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **63** (1967), 963.

[6] Kizmaz, H., On Certain Sequence Spaces, *Soochow J. Math.* **24** (1981), 169-176.

[7] M, E.T. dan A. Esi, On Köthe-Toeplitz duals of Generalized Difference Sequence Spaces, *Bull. Malaysian Math. Sc. Soc.* (2)**23** (2000), 25-32.

[8] Ng, PN. and Lee, P.Y., Cesaro Sequence Spaces of Non Absolute Type, *Comment. Math.* **20** (1978), 429-433.

[9] Orhan, C., Cesaro Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations, *Commun. Fac. Sci.Univ. Ankara, Ser. A.* **32** (1983), 55-63.

[10] Shiue, J.S., On The Cesaro Sequence Spaces, *Thamkang J. Math.* **1** (1970), 19-25.