JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 2 (NOV 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

KARAKTERISASI DAN BEBERAPA SIFAT RUANG CEC

Erik Maurten Firdaus[1*], Ade Ima Afifa Himayati[2]

[1,2]*Universitas Muhammadiyah Kudus*
Email: [1]erikmaurteen@umkudus.ac.id, [2]adeimaafifa@umkudus.ac.id
*Penulis Korespondensi

Abstract. In this paper, we define the notion of CEC spaces. We also study about a characterization and some properties of CEC spaces such as hereditary, topological property, finite productive, and divisible.
Keywords: discrete spaces, CEC spaces, sequentially open set, sequentially continuous function.
Abstrak. Di dalam tulisan ini, didefinisikan ruang CEC. Dibahas pula karakterisasi dan beberapa sifat ruang CEC seperti menurun, sifat topologi, produk berhingga, dan terbagi.
Kata Kunci: ruang topologi diskret, ruang CEC, himpunan terbuka sekuensial, fungsi kontinu sekuensial.

I. PENDAHULUAN

Konsep ruang sekuensial, himpunan terbuka sekuensial, dan himpunan tertutup sekuensial diperkenalkan oleh [10]. Konsep-konsep tersebut di dalam papernya digunakan untuk membuat karakterisasi kelas ruang topologi yang dapat diidentifikasi dengan pengetahuan barisan konvergen. Konsep keterhubungan memegang peranan penting yang tidak hanya dalam matematika , tapi juga cabang sains yang melibatkan matematika seperti sistem informasi geografi, model populasi, dan perencanaan gerakan robotik [4]. Dalam tulisan yang merujuk [1], yaitu [9], dibahas definisi mengenai terhubung sekuensial. Definisi terhubung sekuensial tersebut diperoleh dengan cara mengganti kata himpunan terbuka pada definisi terhubung dengan himpunan terbuka sekuensial. Tahun 2012, Çakalli[4] memperkenalkan konsep G-terhubung pada topologi grup. Konsep G-terhubung pada topologi struktur aljabar yang lain dapat ditemukan di [8]. Definisi fungsi kontinu sekuensial diberikan di dalam [9].H.F Akiz dan L. Koçak [5] memaparkan konsep ruang Hausdorff sekuensial beserta hubungannya dengan ruang Hausdorff sekuensial penuh. Definisi ruang Hausdorff sekuensial tersebut juga diperoleh dengan mengganti kata himpunan terbuka pada definisi ruang Hausdorff menjadi himpunan terbuka sekuensial.

Di dalam paper ini, pertama-tama dibahas ruang CEC yang definisinya dibangun dari sifat barisan konvergen dalam ruang diskret. Selanjutnya, diberikan karakterisasi ruang CEC dengan menggunakan himpunan terbuka sekuensial. Penulis juga menyelidiki sifat-sifat ruang CEC di antaranya menurun, sifat topologi, produk berhingga, dan terbagi.

II. RUANG CEC

Pada bagian ini dibahas mengenai karakterisasi dan beberapa sifat ruang CEC. Setiap barisan konvergen (x_n) di ruang diskret memiliki sifat setelah n_0 suku tertentu, suku-sukunya konstan. Hal ini memotivasi penulis untuk mendefinisikan ruang CEC. CEC adalah singkatan dari *convergent eventually constant*.

Definisi 1 *Ruang topologi X disebut ruang CEC jika untuk setiap barisan konvergen (x_n) di X, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $x_{n_0} = x_n$.*

Teorema 1 *Diketahui (X, τ) ruang CEC. Jika barisan (x_n) di X konvergen ke $x \in X$, maka terdapat $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_n = x$.*

Bukti. Karena (x_n) konvergen di X dan X ruang CEC, maka terdapat $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_{n'} = x_n$. Diperoleh barisan

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_{n'-1}, x_{n'}, x_{n'}, x_{n'}, ...).$$

Andaikan $x_{n'} \neq x$. Karena barisan (x_n) konvergen ke x, maka setiap himpunan terbuka yang memuat x, memuat $x_{n'}$. Barisan $(x, x_{n'}, x, x_{n'}, x, x_{n'}, ...)$ konvergen ke x. Hal ini kontradiksi dengan definisi X ruang CEC. $\square$

Untuk lebih memahami konsep ruang CEC, dapat dilihat contoh-contoh berikut.

Contoh 1 Didefinisikan $X = \{0, 1\}$ dan $\tau = \{X, \emptyset, \{0\}\}$. Ruang topologi (X, τ) bukan ruang CEC karena ada barisan $(0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$ yang konvergen ke 1.

Contoh 2 Ruang diskret merupakan ruang CEC.

Contoh 3 Didefinisikan himpunan X tidak terhitung, $p \in X$, dan koleksi

$$\tau = \{U \subseteq X : p \notin U \text{ atau } X \setminus U \text{ terhitung}\}.$$

Ruang topologi (X, τ) merupakan ruang CEC. Diambil sebarang barisan (x_n) di X yang konvergen ke $x \in X$. Himpunan $X \setminus \{x_n : x_n \neq x, n \in \mathbb{N}\}$ terbuka di X dan memuat x. Hal ini berarti ada $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_n = x$.

Contoh 4 [3] Diberikan ruang topologi $(\mathbb{Z}, \tau)$ dengan τ dibangun koleksi

$$B = \{B_n | n \in \mathbb{Z}\},$$

di mana

$$B_n = \begin{cases} \{n\} & , n \text{ ganjil} \\ \{n-1, n, n+1\} & , n \text{ genap.} \end{cases}$$

Ruang $\mathbb{Z}$ bukan ruang CEC karena ada barisan $(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$ yang konvergen ke 2.

Contoh 5 Diketahui X himpunan tak terhitung dan $\tau = \{U \subseteq X | X \setminus U \text{ terhitung}\} \cup \{\emptyset\}$. Ruang (X, τ) adalah ruang topologi komplemen terhitung. Diambil sebarang barisan (y_n) di X yang konvergen ke $y \in X$. Didefinisikan himpunan $A = X \setminus \{y_n | y_n \neq y, n \in \mathbb{N}\}$. Himpunan A terbuka di X dan memuat y. Hal ini berarti ada $n_* \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_*$ berlaku $y_n \in A$ atau $y_n = y$. Jadi, ruang (X, τ) merupakan ruang CEC.

Teorema berikut memberikan hubungan antara ruang CEC dengan himpunan terbuka sekuensial.

Teorema 2 *Diketahui (X, τ) ruang topologi. Ruang X adalah ruang CEC jika hanya jika setiap himpunan bagian X merupakan himpunan terbuka sekuensial.*

Bukti. Pertama, akan dibuktikan terlebih dahulu setiap himpunan bagian X merupakan himpunan terbuka sekuensial.
$\Rightarrow$
Diambil sebarang $x \in X$ dan barisan (x_n) di X yang konvergen ke x. Karena X ruang CEC, maka terdapat $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_n \in \{x\}$. Akibatnya, untuk setiap $x \in X$ berlaku $\{x\}$ himpunan terbuka sekuensial. Diambil sebarang himpunan $D \subseteq X$. Diambil sebarang barisan (y_n) di X yang konvergen ke anggota D, namakan y. Karena $\{y\}$ himpunan terbuka sekuensial, maka ada $n_* \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_*$ berlaku $y_n \in \{y\} \subseteq D$. Dengan demikian, D himpunan terbuka sekuensial.
$\Leftarrow$
Diambil sebarang barisan (x_n) di X yang konvergen ke $x \in X$. Karena setiap himpunan bagian X merupakan himpunan terbuka sekuensial, maka $\{x\}$ himpunan terbuka sekuensial. Hal ini berarti ada $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_n = x$. Jadi, X ruang CEC. $\square$

Karakterisasi ruang CEC diberikan dalam Teorema 3.

Teorema 3 *Diketahui (X, τ) ruang topologi. Kelima pernyataan berikut saling ekuivalen:*

1. *X ruang CEC.*
2. *Untuk setiap $x \in X$, himpunan $\{x\}$ merupakan himpunan terbuka sekuensial.*
3. *Setiap himpunan bagian X merupakan himpunan terbuka sekuensial.*
4. *Setiap himpunan bagian X merupakan himpunan tertutup sekuensial.*
5. *X ruang T_1 dan jika $A \subseteq X$ adalah irisan semua himpunan terbuka yang memuat A, maka A himpunan terbuka sekuensial.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 2, pernyataan *1*, *2*, dan *3* saling ekuivalen.
3 $\Rightarrow$ *4*
Diambil sebarang $A \subseteq X$. Berdasarkan anteseden, $X \setminus A$ himpunan terbuka sekuensial. Akibatnya, A himpunan tertutup sekuensial.
4 $\Rightarrow$ *5*
Akan dibuktikan X ruang T_1. Diambil sebarang $x \in X$. Berdasarkan anteseden, $\{x\}$ himpunan tertutup sekuensial. Andaikan ada $y \in cl\{x\}$, tetapi $y \notin \{x\}$. Karena $y \in cl\{x\}$, maka barisan $(x, x, x, ...)$ konvergen ke y. Pernyataan $y \notin \{x\}$ dan $(x, x, x, ...)$ konvergen ke y kontradiksi dengan pernyataan $\{x\}$ himpunan tertutup sekuensial. Pernyataan yang benar adalah $cl\{x\} \subseteq \{x\}$. Akibatnya, $\{x\}$ himpunan tertutup. Didapat X ruang T_1.
Akan dibuktikan A himpunan terbuka sekuensial. Berdasarkan anteseden, $X \setminus A \subseteq X$ himpunan tertutup sekuensial. Akibatnya, A himpunan terbuka sekuensial.

5 ⇒ 3
Diambil sebarang $A \subseteq X$. Akan dibuktikan A himpunan terbuka sekuensial. Berdasarkan [11], setiap himpunan bagian ruang T_1 adalah irisan semua himpunan terbuka yang memuat himpunan bagian tersebut. Karena X ruang T_1 dan $A \subseteq X$, maka A adalah irisan semua himpunan terbuka yang memuat A. Berdasarkan anteseden, A himpunan terbuka sekuensial. □

Setiap ruang diskret merupakan ruang CEC. Kebalikannya belum tentu berlaku. Muncul pertanyaan kapan ruang CEC ekuivalen dengan ruang diskret. Di ruang sekuensial, ruang CEC ekuivalen dengan ruang diskret. Konsep ruang sekuensial dibutuhkan untuk membuktikan pernyataan tersebut. Berikut ini diberikan definisi ruang sekuensial.

Definisi 2 *[10][2] Diketahui (X, τ) ruang topologi. Ruang (X, τ) disebut ruang sekuensial jika setiap himpunan terbuka sekuensial di X merupakan himpunan terbuka.*

Setiap himpunan terbuka merupakan himpunan terbuka sekuensial [5]. Akibatnya, di ruang sekuensial himpunan terbuka ekuivalen dengan himpunan terbuka sekuensial. Berikut ini diberikan contoh-contoh ruang sekuensial.

Contoh 6 [10][5] Diketahui (X, τ) ruang diskret. Karena setiap himpunan bagian X merupakan himpunan terbuka di X, maka ruang X merupakan ruang sekuensial.

Contoh 7 Diberikan himpunan $X = \{a, b, c\}$. Didefinisikan ruang topologi $(X, \{X, \emptyset, \{a\}\})$. Himpunan X adalah satu-satunya himpunan terbuka yang memuat b dan c. Karena itu, barisan $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, ...)$ konvergen ke b dan c. Akibatnya, himpunan $\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$, dan $\{b, c\}$ bukan himpunan terbuka sekuensial. Sementara itu, himpunan $\{a\}$ merupakan himpunan terbuka sekuensial. Himpunan terbuka sekuensial di X hanya $X, \emptyset$, dan $\{a\}$. Setiap himpunan terbuka sekuensial di X merupakan himpunan terbuka. Jadi, ruang $(X, \{X, \emptyset, \{a\}\})$ merupakan ruang sekuensial.

Di ruang sekuensial, ruang CEC ekuivalen dengan ruang diskret. Pernyataan ini dibuktikan dalam teorema berikut.

Teorema 4 *Diketahui (X, τ) ruang sekuensial. Ruang (X, τ) adalah ruang CEC jika hanya jika (X, τ) ruang diskret.*

Bukti. Berdasarkan Contoh 2, jika (X, τ) ruang diskret, maka (X, τ) ruang CEC. Akan dibuktikan kebalikannya. Diambil sebarang A himpunan bagian X. Berdasarkan Teorema 3, himpunan A merupakan himpunan terbuka sekuensial. Karena X ruang sekuensial, maka A himpunan terbuka. Karena A diambil sebarang, maka X ruang diskret. □

Setiap fungsi yang terdefinisi pada ruang diskret merupakan fungsi kontinu[7]. Setiap fungsi yang terdefinisi pada ruang CEC merupakan fungsi kontinu sekuensial.

Teorema 5 *Diketahui X dan Y ruang topologi serta fungsi $f : X \to Y$. Jika X ruang CEC, maka f fungsi kontinu sekuensial.*

Bukti. Diambil sebarang $x \in X$ dan barisan (x_n) di X yang konvergen ke x. Karena X ruang CEC, maka terdapat $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_n = x$.

Akibatnya, untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $f(x_n) = f(x)$. Barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(x)$. Jadi, fungsi f kontinu sekuensial pada X. $\square$

Ruang topologi komplemen terhitung yang dipaparkan pada Contoh 5 bukan merupakan ruang Hausdorff. Secara umum, ruang CEC bukan ruang Hausdorff. Jika diteliti hubungan antara ruang CEC dengan ruang Hausdorff sekuensial, maka setiap ruang CEC merupakan ruang Hausdorff sekuensial.

Teorema 6 *Diketahui (X, τ) ruang topologi. Jika X ruang CEC, maka X ruang Hausdorff sekuensial.*

Bukti. Diambil sebarang $x, y \in X$ dengan $x \neq y$. Barisan $(x_n) = (x, x, x, x, ...)$ konvergen ke x. Himpunan $\{y\}$ merupakan himpunan terbuka sekuensial sehingga barisan (x_n) tidak konvergen ke y. Karena (x_n) tidak konvergen ke y, maka terdapat himpunan terbuka U_y memuat y sehingga $x \notin U_y$. Terdapat himpunan terbuka sekuensial $\{x\}$ dan U_y sehingga $\{x\} \cap U_y = \emptyset$. Jadi, X ruang Hausdorff sekuensial.

$\square$

Kebalikan Teorema 6 belum tentu berlaku. Himpunan $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan topologi biasa merupakan ruang Hausdorff sekuensial, tetapi bukan ruang CEC.

Selanjutnya, setiap ruang bagian ruang diskret merupakan ruang diskret. Jika ruang diskret diganti dengan ruang CEC, pernyataan tetap berlaku. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 7 *Ruang CEC mempunyai sifat menurun.*

Bukti. Diketahui X ruang CEC. Akan dibuktikan ruang bagian $A \subseteq X$ adalah ruang CEC. Diambil sebarang barisan (x_n) di A yang konvergen ke $a \in A$. Karena $A \subseteq X$, maka barisan (x_n) di X. Diambil sebarang V himpunan terbuka di X yang memuat a. Himpunan $V \cap A$ terbuka di A dan memuat a. Di ruang bagian A, barisan (x_n) konvergen ke a. Hal ini berarti ada n" $\in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n$" berlaku $x_n \in V \cap A$. Akibatnya untuk setiap $n \geq n$" berlaku $x_n \in V$. Dengan demikian, di ruang topologi X, barisan (x_n) juga konvergen ke a. Karena X ruang CEC, maka ada $n_* \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_*$ berlaku $x_n = a$. Hal ini berarti A ruang CEC. $\square$

Setiap ruang topologi komplemen terhitung X dengan X tak terhitung merupakan ruang terhubung[7]. Sementara itu, ruang diskret yang setidaknya memiliki dua anggota, tidak terhubung. Ada contoh ruang CEC yang terhubung dan ada pula contoh yang tidak terhubung. Selanjutnya, dipaparkan hubungan ruang CEC dengan terhubung sekuensial.

Teorema 8 *Diketahui X ruang CEC dan ruang bagian $S \subseteq X$. Jika S setidaknya memiliki dua anggota, maka S tidak terhubung sekuensial.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 7, ruang bagian S adalah ruang CEC. Berdasarkan Teorema 3, setiap himpunan bagian S terbuka sekuensial di S. Diambil sebarang $x \in S$. Himpunan $\{x\}$ dan $S \setminus \{x\}$ terbuka sekuensial di S dan saling asing. Karena $\{x\}$ dan $S \setminus \{x\}$ saling asing serta $S = \{x\} \cup (S \setminus \{x\})$, maka S tidak terhubung sekuensial. $\square$

Ruang CEC mempunyai sifat topologi. Hal ini ditunjukkan dalam Teorema 9.

Teorema 9 *Diberikan ruang topologi X dan Y serta homeomorfisma $f : X \to Y$. Jika X ruang CEC, maka Y ruang CEC.*

Bukti. Diambil sebarang barisan (y_n) di Y yang konvergen ke $y \in Y$. Karena f^{-1} kontinu sekuensial pada Y, maka barisan $(f^{-1}(y_n))$ konvergen ke $f^{-1}(y)$. Karena $(f^{-1}(y_n))$ konvergen ke $f^{-1}(y) \in X$ dan X ruang CEC, maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$. Karena f bijektif, maka untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $y_n = y$. Didapat Y ruang CEC. □

Jika $X_1, X_2, ..., X_k$ ruang CEC, maka $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ ruang CEC. Ruang CEC memiliki sifat produk berhingga. Hal ini ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 10 *Diketahui $X_1, X_2, ..., X_k$ ruang topologi. Jika $X_1, X_2, ..., X_k$ ruang CEC, maka ruang topologi produk $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ adalah ruang CEC.*

Bukti. Untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$, didefinisikan proyeksi $\pi_i : X \to X_i$ dengan

$$\pi_i(x_1, x_2, .., x_k) = x_i.$$

Diambil sebarang barisan (x_n) di $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ yang konvergen ke $t \in X$. Akibatnya, $(\pi_i(x_n)) = (x_n(i))$ konvergen ke $t_i \in X_i$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$. Karena X_i ruang CEC, maka ada $n(i) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n(i)$ berlaku $x_n(i) = t_i$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$. Didefinisikan

$$n' = \max\{n(i) | i = 1, 2, ..., k\}.$$

Untuk setiap $n \geq n'$ berlaku $x_n = t$. Didapat $\prod_{i=1}^{k} X_i$ ruang CEC. □

Kebalikan Teorema 10 tetap berlaku.

Teorema 11 *Diketahui $X_1, X_2, ..., X_k$ ruang topologi. Jika ruang topologi produk*

$$X = \prod_{i=1}^{k} X_i$$

adalah ruang CEC, maka $X_1, X_2, ..., X_k$ ruang CEC.

Bukti. Untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$, didefinisikan proyeksi $\pi_i : X \to X_i$ dengan

$$\pi_i(x_1, x_2, .., x_k) = x_i.$$

Untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$ diambil sebarang barisan $(x_n(i))$ di X_i yang konvergen ke $t_i \in X_i$. Didefinisikan barisan (x_n) di $\prod_{i=1}^{k} X_i$ dengan $\pi_i(x_n) = (x_n(i))$. Barisan (x_n) konvergen ke $t = (t_1, t_2, ..., t_k)$. Karena $\prod_{i=1}^{k} X_i$ ruang CEC, maka terdapat $n' \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n'$ berlaku $x_n = t$. Akibatnya, untuk setiap $i = 1, 2, ..., k$ dan $n \geq n'$ berlaku $x_n(i) = t_i$. □

Selanjutnya dibahas konsep sifat terbagi.

Definisi 3 *[6] Sifat P ruang topologi dikatakan terbagi jika ruang hasil bagi dari ruang topologi yang memiliki sifat P, memiliki sifat P.*

Berdasarkan definisi tersebut, setiap ruang diskret, terbagi. Hal ini memunculkan pertanyaan tentang sifat terbagi di ruang CEC. Ruang CEC belum tentu terbagi. Hal ini ditunjukkan dalam contoh berikut.

Contoh 8 Didefinisikan ruang $(\mathbb{R}, \tau)$ dengan τ adalah topologi komplemen terhitung dan relasi

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x, y \in \mathbb{Q} \text{ atau } x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Berdasarkan Contoh 5, ruang $(\mathbb{R}, \tau)$ adalah ruang CEC. Relasi E adalah relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}$. Kelas ekuivalensi yang terbentuk adalah $\left[\frac{1}{2}\right]$ dan $\left[\sqrt{2}\right]$. Didefinisikan himpunan

$$\mathbb{R}/E = \left\{ \left[\frac{1}{2}\right], \left[\sqrt{2}\right] \right\}.$$

Dibentuk fungsi surjektif $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/E$ dengan

$$q(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}\right] & , x \in \mathbb{Q} \\ \left[\sqrt{2}\right] & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Didefinisikan pula τ_E topologi hasil bagi pada himpunan $\mathbb{R}/E$ dengan

$$\tau_E = \{U \subseteq \mathbb{R}/E | \, q^{-1}(U) \text{ terbuka di } (\mathbb{R}, \tau)\} = \left\{\emptyset, \mathbb{R}/E, \left\{\left[\sqrt{2}\right]\right\}\right\}.$$

Karena ada barisan $\left(\left[\frac{1}{2}\right], [\sqrt{2}], \left[\frac{1}{2}\right], [\sqrt{2}], \left[\frac{1}{2}\right], \left[\sqrt{2}\right], ...\right)$ yang konvergen ke $\left[\frac{1}{2}\right]$, maka ruang hasil bagi $(\mathbb{R}/E, \tau_E)$ bukan ruang CEC.

III. KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Berdasarkan pemaparan pada bagian II, ruang CEC dapat dikarakterisasi dengan menggunakan himpunan terbuka sekuensial, yang dapat dilihat di Teorema 3. Ruang CEC mempunyai sifat topologi, menurun, produk berhingga, tetapi tidak selalu terbagi. Ruang topologi (Z, τ) yang diberikan pada Contoh 4 merupakan contoh yang menarik. Hal ini karena ada himpunan $A = \{2n - 1 | n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ sehingga setiap barisan (x_n) di $\mathbb{Z}$ yang konvergen ke $x \in A$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $x_n = x$. Di dalam contoh tersebut, himpunan A adalah himpunan bagian sejati himpunan $\mathbb{Z}$. Hal ini dapat memotivasi penelitian lanjut di ruang topologi yang definisinya merupakan perlemahan definisi ruang CEC.

REFERENSI

[1] A. Fedeli and A. Le Donne, "On good connected preimages," *Topol. Appl.*, vol. 125, no. 3, pp. 489–496, 2002.

[2] A. Goreham, "Sequential convergence in topological spaces," pp. 1–29, 2016, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/math/0412558.

[3] Colin Adams and Robert Franzosa, *Introduction to Topology Pure and Applied*. India: Pearson Prentice Hall, 2009.

[4] H. Çakalli, "Sequential definitions of connectedness," *Appl. Math. Lett.*, vol. 25, no. 3, pp. 461–465, 2012.

[5] H. F. Akiz and L. Koçak, "Sequentially Hausdorff and Full Sequentially Hausdorff Spaces," *Communication Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics.*, vol. 68, pp. 1724–1732, 2019.

[6] John L. Kelley, *General Topology*. New York: Springer-Verlag, 1955.

[7] L.A. Steen and J. Arthur Seebach, *Counterexamples in Topology*. New York: Dover Publications, 1995.

[8] O. Mucuk and H. Çakalli, "G-Connectedness in topological groups with operations," *Filomat*, vol. 32, no. 3, pp. 1079–1089, 2018.

[9] Q. Huang and S. Lin, "Notes on sequentially connected spaces," *Acta Math. Hungarica*, vol. 110, no. 1–2, pp. 159–164, 2006.

[10] S.P. Franklin, "Spaces in which sequences suffice,"*Fundamenta Mathematicae*, vol. 57, pp. 107-115, 1965.

[11] Stephen Willard, *General Topology*. Philippines: Addison-Wesley Publishing Company, 1970.