JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 2 (NOV 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

BEBERAPA SIFAT (R,S)-SUBMODUL PRIMA-α GABUNGAN

Dian Ariesta Yuwaningsih[1*], Rusmining[2], Puguh Wahyu Prasetyo[3]

[1,2,3]*Pendidikan Matematika Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta*
Email: [1*]dian.ariesta@pmat.uad.ac.id

Abstract. Let R and S be commutative rings. The primeness of rings has evolved into a module structure. However, the definition of primeness so far only focuses on the scalar multiplication operation in the module. The α-prime submodule is one of the generalizations of prime submodules which involves additive operations and scalar multiplication operations in the module. In this article, a generalization of α-prime submodules into the (R,S)-module structure is presented, hereinafter referred to as jointly α-prime (R,S)-submodules. Next, some properties of jointly α-prime (R,S)-submodules are presented. Some of these properties include the necessary and sufficient conditions for an (R,S)-submodule to be jointly α-prime (R,S)-submodules; properties of jointly α-prime (R,S)-submodules related to homomorphisms (R,S)-module; as well as the necessary and sufficient conditions for a factor (R,S)-submodules to be jointly α-prime (R,S)-submodules. Some of the jointly α-prime (R,S)-submodule properties were obtained from the development of primeness properties in the module structure.
Keywords: α-prime submodules, (R,S)-modules, jointly prime submodules

Abstrak. Misalkan R dan S merupakan ring komutatif. Keprimaan pada suatu ring telah mengalami perkembangan ke dalam struktur modul. Namun, definisi keprimaan yang ada selama ini hanya berfokus pada operasi pergandaan skalar di dalam modul. Submodul prima-α merupakan salah satu perumuman dari submodul prima yang melibatkan operasi aditif dan pergandaan skalar di dalam modul. Pada artikel ini disajikan generalisasi dari submodul prima-α ke dalam struktur (R,S)-modul, yang selanjutnya disebut (R,S)-submodul prima-α gabungan. Selanjutnya, disajikan beberapa sifat dari (R,S)-submodul prima-α gabungan. Beberapa sifat tersebut diantaranya adalah syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan; sifat (R,S)-submodul prima-α gabungan yang berkaitan dengan homomorfisma (R,S)-modul; serta syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul faktor membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan. Beberapa sifat (R,S)-submodul prima-α gabungan tersebut diperoleh dari pengembangan sifat keprimaan dalam struktur modul.
Kata Kunci: submodul prima-α, (R,S)-modul, submodul prima gabungan

I. PENDAHULUAN

Penelitian terkait keprimaan pada suatu modul pertama kali diperkenalkan oleh [1]. Hasil dalam penelitian [1] selanjutnya menjadi dasar bagi penelitian-penelitian lanjutan tentang keprimaan pada suatu modul hingga saat ini. Beberapa hasil pengembangan dari definisi submodul prima diantaranya adalah submodul semiprima [1], submodul endoprima [2], [3], submodul koprima [4], [5], dan submodul prima lemah [6]–[8]. Namun, beberapa perumuman dari submodul prima tersebut hanya berfokus pada operasi pergandaan skalar di dalam modul. Padahal modul juga memiliki operasi penjumlahan yang dibawa dari struktur grupnya. Submodul prima-α merupakan salah satu generalisasi dari submodul prima yang melibatkan semua operasi dari struktur modulnya, tidak hanya operasi perkalian skalarnya saja. Konsep terkait submodul prima-α ini diperkenalkan oleh [9]. Apabila diberikan submodul H di dalam suatu modul M, maka didefinisikan himpunan $\alpha(H) = \{h \in M \mid h + h \in H\}$. Selanjutnya, suatu submodul sejati P di M disebut submodul prima-α jika untuk setiap elemen $r \in R$ dan elemen $m \in M$ dengan $r(m + m) \in P$ maka berakibat $r + r \in (P :_R M)$ atau $m \in \alpha(P)$. Lebih lanjut, [9] juga menyajikan beberapa sifat terkait submodul prima-α hingga himpunan perkalian multiplikatifnya.

Berdasarkan [10] dan [11], suatu modul telah mengalami proses perumuman menjadi suatu bimodul. Dan bimodul sendiri telah diperumum menjadi struktur (R, S)-modul. Konsep terkait (R, S)-modul ini pertama kali diperkenalkan oleh [12]. Dalam papernya, [12] juga telah mengenalkan pendefinisian beberapa keprimaan di dalam (R, S)-modul, yaitu (R, S)-submodul prima penuh dan (R, S)-submodul prima gabungan disertai dengan beberapa sifat-sifatnya.

Penelitian terkait submodul prima-α yang disajikan dalam paper [9] merupakan suatu hal yang baru. Konsep terkait submodul prima-α ini belum dikembangkan ke dalam struktur (R, S)-modul. Selama ini peneliti berusaha mengembangkan konsep keprimaan di dalam struktur (R, S)-modul dengan cara mengamati perkembangan di seputar topik ini. Oleh karena itu, pada penelitian kali ini peneliti telah mengembangkan konsep terkait submodul prima-α pada suatu modul ke dalam struktur (R, S)-modul. Telah dikonstruksikan pendefinisian (R, S)-submodul prima-α gabungan dan telah diselidiki beberapa sifat dari (R, S)-submodul prima-α gabungan dengan mengembangkan sifat-sifat submodul prima-α dalam [9] dan mengembangkan sifat-sifat submodul prima lainnya dalam [1] dengan tetap memperhatikan konsep struktur (R, S)-modul dalam [12].

II. (R, S)-SUBMODUL PRIMA-α GABUNGAN

Dalam keseluruhan tulisan ini, ring R dan ring S masing-masing merupakan ring komutatif tanpa elemen satuan, kecuali apabila dinyatakan selain itu. Merujuk pada [12], berikut disajikan suatu sifat dasar di dalam (R, S)-modul.

Proposisi 1 [12] *Diberikan (R, S)-submodul N di M, himpunan tak kosong $X \subseteq R$, dan himpunan tak kosong $Y \subseteq S$. Jika M memenuhi sifat $a \in RaS$ untuk setiap $a \in M$, maka:*

a). Jika $(RX)MS \subseteq N$ maka $XMS \subseteq N$.

$XMS \subseteq (XR)MS$

b). Jika $RM(YS) \subseteq N$ maka $RMY \subseteq N$.

$RMY \subseteq RM(SY)$

c). $W \subseteq RWS$ untuk setiap himpunan tak kosong W di M. Lebih lanjut, jika W merupakan (R, S)-submodul di M maka $W = RWS$.

Berdasarkan pada [12], di dalam (R, S)-modul juga dikenal adanya himpunan annihilator. Untuk setiap (R, S)-submodul P di M didefinisikan himpunan

$$(P :_R M) = \{r \in R \mid rMS \subseteq P\}.$$

Karena R dan S dalam [12] merupakan ring sebarang, maka diperoleh bahwa himpunan $(P:_R M)$ ini hanya merupakan subgrup aditif dari ring R. Namun, jika (R,S)-modul M memenuhi sifat $S^2 = S$, maka himpunan $(P:_R M)$ ini membentuk suatu ideal di R.

Merujuk pada [12] apabila diberikan (R,S)-modul M dengan sifat untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka suatu (R,S)-submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima gabungan apabila untuk setiap $a \in R$, $m \in M$, dan $b \in S$ dengan $(aR)m(Sb) \in P$ maka berakibat $aMb \subseteq P$ atau $m \in P$. Selanjutnya, berikut diberikan definisi dari (R,S)-submodul prima gabungan yang melibatkan himpunan annihilator.

Definisi 1 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $amS \in P$ maka berakibat $a \in (P:_R M)$ atau $m \in P$.*

Sebelum mendefinisikan (R,S)-submodul prima-α gabungan, berikut disajikan definisi dari himpunan α dan β beserta sifatnya merujuk pada [9].

Definisi 2 *[9] Diberikan grup $(G,+)$ dan himpunan bagian H di G. Didefinisikan:*

a). $\alpha(H) = \{h \in G \mid h + h \in H\}$

b). $\beta(H) = \{h + h \mid h \in H\}$

Merujuk [9], jika diketahui N merupakan ideal di R, maka himpunan $\alpha(N)$ dan himpunan $\beta(N)$ masing-masing juga merupakan ideal di R. Sifat ini juga dapat dikembangkan untuk kasus N yang merupakan (R,S)-submodul di M, seperti yang disajikan pada proposisi berikut ini.

Proposisi 2 *Jika N merupakan (R,S)-submodul di M, maka $\alpha(N)$ dan $\beta(N)$ masing-masing juga merupakan (R,S)-submodul di M.*

Bukti:

a). Akan dibuktikan bahwa $\alpha(N)$ merupakan (R,S)-submodul di M.

  a. Karena $0 \in \alpha(N)$, maka jelas bahwa $\alpha(N) \neq \emptyset$.

  b. Diambil sebarang $x, y \in \alpha(N)$, maka $x, y \in M$ dan memenuhi $x + x \in N$ serta $y + y \in N$. Akibatnya, diperoleh

$$(x - y) + (x - y) = (x + x) - (y + y) \in N.$$

  Jadi, diperoleh $x - y \in \alpha(N)$.

  c. Diambil sebarang $x \in \alpha(N)$, $r \in R$, dan $s \in S$, maka $x \in R$ dan memenuhi $x + x \in N$. Akibatnya, karena N merupakan (R,S)-submodul di M maka diperoleh

$$rxs + rxs = r(x + x)s \in N$$

  Jadi, diperoleh bahwa $rxs \in \alpha(N)$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $\alpha(N)$ merupakan (R,S)-submodul di M.

b). Akan dibuktikan bahwa $\beta(N)$ merupakan (R,S)-submodul di M.

  a. Karena N merupakan (R,S)-submodul di M maka $0 \in N$ dan $0 + 0 \in \beta(N)$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\beta(N) \neq \emptyset$.

b. Diambil sebarang $x+x, y+y \in \beta(N)$, maka $x, y \in N$. Akibatnya, karena N merupakan (R,S)-submodul di M maka diperoleh $x-y \in N$ dan memenuhi:

$$(x+x)-(y+y)=(x-y)+(x-y) \in \beta(N).$$

c. Diambil sebarang $x+x \in \beta(N), r \in R$, dan $s \in S$, maka $x \in N$. Akibatnya, karena N merupakan (R,S)-submodul di M maka diperoleh $rxs \in N$ dan memenuhi:

$$r(x+x)s = rxs + rxs \in \beta(N).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\beta(N)$ (R,S)-submodul di M. □

Dengan membawa definisi submodul prima-α [9] ke dalam struktur (R,S)-modul, berikut disajikan definisi dari (R,S)-submodul prima-α gabungan.

Definisi 3 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima-α gabungan jika untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m+m)S \subseteq P$ maka berakibat $r+r \in (P:_R M)$ atau $m+m \in P$.*

Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan definisi lain dari (R,S)-submodul prima-α gabungan.

Proposisi *3 Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati P di M merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan jika dan hanya jika untuk setiap ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq P$ maka berakibat $N+N \subseteq P$ atau $I+I \subseteq (P:_R M)$.*

Bukti: ($\Rightarrow$). Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq P$ tetapi $N+N \nsubseteq P$. Diambil sebarang $x \in I$ dan $n \in N$ maka diperoleh $x(n+n)S \subseteq P$ tetapi $n+n \notin P$. Karena diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka diperoleh $x+x \in (P:_R M)$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $I+I \subseteq (P:_R M)$.

($\Leftarrow$). Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m+m)S \subseteq P$ tetapi $m+m \notin P$. Diperhatikan bahwa $RrR(m+m)SSS \subseteq RPS = P$, sehingga $Rr(RmS+RmS)S^2 = Rr(RmS+RmS)S \subseteq P$. Dari sini, maka diperoleh $Rr+Rr \subseteq (P:_R M)$ atau $RmS+RmS \subseteq P$. Dari $Rr+Rr \subseteq (P:_R M)$ diperoleh $RrMS+RrMS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$, maka diperoleh $RrMSS+RrMSS \subseteq P$. Karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka diperoleh $rMS+rMS \subseteq P$, sehingga diperoleh $r+r \in (P:_R M)$. Selanjutnya, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka dari $RmS+RmS \subseteq P$ diperoleh $m+m \in P$. Dengan demikian, diperoleh $r+r \in (P:_R M)$ atau $m+m \in P$.Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Contoh 1 Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-modul. Dapat ditunjukkan bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul prima-$\alpha$ gabungan di $\mathbb{Z}$. Diambil sebarang ideal $I=(2k)\mathbb{Z}$ di $2\mathbb{Z}$ dan $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul $N=m\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$, untuk suatu $k,m \in \mathbb{N}$. Apabila diketahui $I(N+N)S = (2k)\mathbb{Z}(m\mathbb{Z}+m\mathbb{Z})3\mathbb{Z} = (2k)\mathbb{Z}(2m\mathbb{Z})3\mathbb{Z} = (12km)\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$ dan $N+N = m\mathbb{Z}+m\mathbb{Z} = 2m\mathbb{Z} \nsubseteq 6\mathbb{Z}$, maka untuk berapapun nilai $k \in \mathbb{N}$ berlaku $(I+I)MS = \big((2k)\mathbb{Z}+(2k)\mathbb{Z}\big)\mathbb{Z}(3\mathbb{Z}) = (4k)\mathbb{Z}\mathbb{Z}(3\mathbb{Z}) = 12k\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $6\mathbb{Z}$ merupakan $(2\mathbb{Z},3\mathbb{Z})$-submodul prima-$\alpha$ gabungan di $\mathbb{Z}$.

Seperti yang telah diketahui, pada teori modul diketahui bahwa suatu modul merupakan modul prima apabila submodul nolnya merupakan submodul prima. Berdasakan definisi modul prima, berikut diberikan definisi (R,S)-modul prima-α gabungan.

Definisi 4 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. M disebut (R,S)-modul prima-α gabungan apabila $\{0\}$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.*

Merujuk pada [1] diketahui bahwa syarat perlu dan syarat cukup suatu modul faktor $M/_X$ mmbentuk modul prima adalah apabila X merupakan submodul prima. Berdasarkan sifat tersebut, berikut diberikan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-modul faktor membentuk (R,S)-modul prima-α gabungan.

Proposisi 4 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati X di M merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan jika dan hanya jika M/X merupakan (R,S)-modul prima-α gabungan.*

Bukti: $(\Rightarrow)$. Diketahui X merupakan merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Jelas bahwa M/X merupakan (R,S)-modul prima-α gabungan.

$(\Leftarrow)$. Diketahui M/X merupakan (R,S)-modul prima-α gabungan, berarti X merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa setiap (R,S)-submodul prima gabungan merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan seperti yang dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 5 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Setiap (R,S)-submodul prima gabungan di M merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan.*

Bukti: Misal, diambil sebarang (R,S)-submodul prima gabungan P di M. Akan ditunjukkan bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m+m)S \subseteq P$. Karena diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima gabungan maka $r \in (P:_R M)$ atau $m + m \in P$. Selanjutnya karena $S^2 = S$, maka $(P:_R M)$ merupakan ideal di R, sehingga $r + r \in (P:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Contoh 2 Diberikan ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$ dan ring $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$. Berdasarkan [12] diketahui bahwa $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in 2\mathbb{Z} \right\}$ merupakan (R,S)-modul. Dapat ditunjukkan bahwa (R,S)-submodul X di M dengan $X = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in 2\mathbb{Z} \right\}$ merupakan (R,S)-submodul prima gabungan di M. Berdasarkan Proposisi 5, maka diperoleh bahwa X merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

III. BEBERAPA SIFAT (R,S)-SUBMODUL PRIMA-α GABUNGAN

Sifat pertama dari (R,S)-submodul prima-α gabungan disajikan pada Proposisi 1 berikut ini. Sifat ini menyajikan beberapa syarat perlu dan syarat cukup agar suatu (R,S)-submodul sejati P di M membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan.

Proposisi 1 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul sejati P di M. Pernyataan-pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen.*

(a). P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.

(b). Untuk setiap ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I\beta(N)S \subseteq P$ maka berakibat $I \subseteq \alpha((P:_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$.

(c). Untuk setiap $a \in R$ dan (R,S)-submodul N di M dengan $a\beta(N)S \subseteq P$ maka berakibat $a \in \alpha((P:_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$.

(d). Untuk setiap ideal I di R dan $m \in M$ dengan $I(m+m)S \subseteq P$ maka berakibat $I \subseteq \alpha((P:_R M))$ atau $m \in \alpha(P)$.

(e). Untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $aR(m+m)S \subseteq P$ maka berakibat $a \in \alpha((P:_R M))$ atau $m \in \alpha(P)$.

(f). Untuk setiap $m \in M$ jika $m + m \notin P$ maka $\alpha\big((P:_R M)\big) = \alpha(P:_R m)$.

Bukti: $(a) \Rightarrow (b)$. Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I\beta(N)S \subseteq P$ tetapi $N \nsubseteq \alpha(P)$. Akan dibuktikan bahwa $I \subseteq \alpha((P:_R M))$. Diambil sebarang elemen $r \in I$ dan $n \in N$ dengan $n \notin \alpha(P)$. Diperoleh $n + n \notin P$ dan $n + n \in \beta(N)$. Karena diketahui $I\beta(N)S \subseteq P$ maka diperoleh $r(n+n)S \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M dan $n + n \notin P$ maka diperoleh $r + r \in (P:_R M)$. Jadi, diperoleh $r \in \alpha((P:_R M))$. Karena pengambilan elemen $r \in I$ sebarang, maka terbukti bahwa $I \subseteq \alpha((P:_R M))$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Diambil sebarang elemen $a \in R$ dan (R,S)-submodul N di M dengan $a\beta(N)S \subseteq P$. Karena $S^2 = S$ maka diperoleh $Ra\beta(N)S = Ra\beta(N)SS = R(a\beta(N)S)S \subseteq RPS = P$. Karena R merupakan ring komutatif, maka jelas bahwa Ra merupakan ideal di R. Berdasarkan (b) diperoleh $Ra \subseteq \alpha((P:_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$. Diperhatikan bahwa karena $Ra \subseteq \alpha((P:_R M))$ maka diperoleh $Ra + Ra \subseteq (P:_R M)$ sehingga $RaMS + RaMS \subseteq P$ atau dituliskan $Ra(M+M)S \subseteq P$. Selanjutnya, karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$ maka diperoleh $a(M+M)S \subseteq P$ atau dituliskan $aMS + aMS \subseteq P$. Dari sini diperoleh $a + a \in (P:_R M)$, sehingga $a \in \alpha((P:_R M))$. Dengan demikian, terbukti bahwa $a \in \alpha((P:_R M))$ atau $N \subseteq \alpha(P)$.

$(c) \Rightarrow (d)$. Diambil sebarang ideal I di R dan elemen $m \in M$ dengan $I(m+m)S \subseteq P$ tetapi $m \notin \alpha(P)$. Akan dibuktikan bahwa $I \subseteq \alpha((P:_R M))$. Diambil sebarang elemen $a \in I$. Selanjutnya, dibentuk (R,S)-submodul siklik $\langle m \rangle$. Jelas bahwa elemen $m \in \langle m \rangle$. Oleh karena $m \notin \alpha(P)$ maka $m + m \notin P$ dan $m + m \in \beta(\langle m \rangle)$. Karena $I(m+m)S \subseteq P$ maka diperoleh $a\beta(\langle m \rangle)S \subseteq P$, sehingga $a\beta(\langle m \rangle)S \subseteq P$. Berdasarkan (c) dan karena $m \notin \alpha(P)$ maka diperoleh $a \in \alpha((P:_R M))$. Dengan demikian, terbukti bahwa $I \subseteq \alpha((P:_R M))$.

$(d) \Rightarrow (e)$. Diambil sebarang elemen $a \in R$ dan $m \in M$ dengan $aR(m+m)S \subseteq P$. Oleh karena R merupakan ring komutatif, maka aR jelas merupakan ideal di R. Akibatnya, dari (d) diperoleh $aR \subseteq \alpha((P:_R M))$ atau $m \in \alpha(P)$. Selanjutnya, dari $aR \subseteq \alpha((P:_R M))$ maka diperoleh $aR + aR \in (P:_R M)$ atau dapat dituliskan $aRMS + aRMS \subseteq P$. Karena R komutatif, maka dapat dituliskan $RaMS + RaMS \subseteq P$. Oleh karena untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, maka dari persamaan $RaMS + RaMS \subseteq P$ diperoleh $aMS + aMS \subseteq P$. Dari sini diperoleh $a+a \in (P:_R M)$ sehingga $a \in \alpha((P:_R M))$. Jadi, terbukti bahwa $a \in \alpha((P:_R M))$ atau $m \in \alpha(P)$.

$(e) \Rightarrow (f)$. Diambil sebarang $m \in M$ dengan $m+m \notin P$, berarti $m \notin \alpha(P)$. Diambil sebarang $a \in \alpha((P:_R M))$ maka $a+a \in (P:_R M)$. Akibatnya, diperoleh $aMS + aMS \subseteq P$ atau dapat dituliskan $(a+a)MS \subseteq P$. Karena $(a+a)mS \subseteq (a+a)MS \subseteq P$ maka diperoleh $a+a \in (P:_R m)$. Jadi, $a \in \alpha((P:_R m))$ sehingga terbukti $\alpha\big((P:_R M)\big) \subseteq \alpha((P:_R m))$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in \alpha((P:_R m))$ maka diperoleh $a+a \in (P:_R m)$. Akibatnya, diperoleh $(a+a)mS \subseteq P$ atau dapat dituliskan $amS + amS \subseteq P$, sehingga $a(m+m)S \subseteq P$. Diperhatikan bahwa karena diketahui $S^2 = S$, maka diperoleh $aR(m+m)S = aR(m+m)SS = a(R(m+m)S)S \subseteq RPS = P$. Dengan demikian, berdasarkan (e), karena $m \notin \alpha(P)$ maka diperoleh $a \in \alpha((P:_R M))$. Jadi, terbukti bahwa $\alpha\big((P:_R m)\big) \subseteq \alpha((P:_R M))$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\alpha\big((P:_R M)\big) = \alpha\big((P:_R m)\big)$.

$(f) \Rightarrow (a)$. Diambil sebarang elemen $r \in R$ dan $m \in M$ dengan $r(m+m)S \subseteq P$ tetapi $m+m \notin P$. Andaikan $r+r \notin (P:_R M)$, maka $r \notin \alpha((P:_R M))$. Oleh karena berdasarkan (f) diketahui $\alpha\big((P:_R M)\big) = \alpha((P:_R m))$, maka $r \notin \alpha((P:_R m))$. Akibatnya, diperoleh $r+r \notin (P:_R m)$. Dengan kata lain, $rmS + rmS \nsubseteq P$ atau dituliskan $r(m+m)S \nsubseteq P$. Kontradiksi dengan yang diketahui. Jadi, diperoleh $r+r \in (P:_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Sebelum membahas sifat (R,S)-submodul prima-α gabungan selanjutnya, berikut diberikan suatu lemma yang akan digunakan dalam pembuktian sifat berikutnya.

Lemma 1 *Diberikan $\psi: M_1 \to M_2$ merupakan homomorfisma (R,S)-modul dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M_1(M_2)$ memenuhi $a \in RaS$, P merupakan (R,S)-submodul di M_1, dan K merupakan (R,S)-submodul di M_2.*

(a). Jika ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dan $r+r \in (P:_R M_1)$, maka $r+r \in (\psi(P), M_2)$.

(b). Jika $r+r \in (K:_R M_2)$ maka $r+r \in (\psi^{-1}(K):_R M_1)$.

Bukti: (a) Diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dan $r+r \in (P:_R M_1)$, maka $(r+r)M_1S \subseteq P$. Diambil sebarang $m_2 \in M_2$. Karena ψ merupakan epimorfisma, maka terapat $m_1 \in M_1$ sedemikian sehingga memenuhi $\psi(m_1) = m_2$. Akibatnya, diperoleh $(r+r)m_1S \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(r+r)m_2S = (r+r)\psi(m_1)S = \psi\big((r+r)m_1S\big) \subseteq \psi(P)$. Karena pengambilan elemen $m_2 \in M_2$ sebarang, maka diperoleh $(r+r)M_2S \subseteq \psi(P)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $r+r \in (\psi(P):_R M_2)$. (b) Diketahui bahwa $r+r \in (K:_R M_2)$, maka $(r+r)M_2S \subseteq K$. Diambil sebarang $m_1 \in M_1$. Karena diketahui ψ merupakan epimorfisma, maka diperoleh $\psi\big((r+r)m_1S\big) = (r+r)\psi(m_1)S \subseteq K$. Dari sini diperoleh $(r+r)m_1S \subseteq \psi^{-1}(K)$. Karena pangambilan elemen $m_1 \in M_1$ sebarang, maka diperoleh $(r+r)M_1S \subseteq \psi^{-1}(K)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $r+r \in (\psi^{-1}(K):_R M_1)$. □

Berikut disajikan sifat selanjutnya dari (R,S)-submodul prima-α gabungan yang berkaitan dengan homomorfisma (R,S)-modul.

Proposisi 2 *Diberikan $\psi: M_1 \to M_2$ merupakan homomorfisma (R,S)-modul dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M_1(M_2)$ memenuhi $a \in RaS$.*

(a). Jika ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dan P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_1 yang memuat $Ker(\psi)$, maka $\psi(P)$ juga merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_2.

(b). Jika K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_2, maka $\psi^{-1}(K)$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_1.

Bukti: (a) Diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dan P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_1 yang memuat $Ker(\psi)$. Akan dibuktikan bahwa $\psi(P)$ juga merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_2. Diambil sebarang elemen $r \in R$ dan $m \in M_2$ sedemikian sehingga memenuhi $r(m+m)S \subseteq \psi(P)$. Oleh karena ψ merupakan epimorfisma maka terdapat $n \in M_1$ dan $p \in P$ sehingga memenuhi $r(m+m)S = \psi(p)$ dan $\psi(n) = m$. Akibatnya, diperoleh:

$$\begin{aligned}\psi(p) &= r(m+m)S \\ &= r\big(\psi(n)+\psi(n)\big)S \\ &= r\big(\psi(n+n)\big)S \\ &= \psi(r(n+n)S)\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh $\psi(p - r(n+n)S) = 0$, sehingga diperoleh $p - r(n+n)S \in Ker(\psi)$. Oleh karena $Ker(\psi) \subseteq P$, maka $r(n+n)S \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan maka diperoleh $r + r \in (P :_R M_1)$ atau $n + n \in P$. Karena ψ epimorfisma, maka berdasarkan Lemma 1a) diperoleh bahwa $r + r \in (\psi(P) :_R M_2)$ atau $m + m \in \psi(P)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\psi(P)$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_2. (b) Diketahui K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_2. Akan dibuktikan bahwa $\psi^{-1}(K)$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_1. Diambil sebarang $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga memenuhi $r(m+m)S \subseteq \psi^{-1}(K)$. Dari sini berarti diperoleh $\psi(r(m+m)S) \subseteq K$, sehingga $r\big(\psi(m)+\psi(m)\big)S \subseteq K$. Oleh karena K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_2, maka diperoleh $r + r \in (K :_R M_2)$ atau $\psi(m) + \psi(m) \in K$. Oleh karena ψ merupakan epimorfisma, maka berdasarkan Lemma 1b) diperoleh bahwa $r + r \in (\psi^{-1}(K) :_R M_1)$ atau $m + m \in \psi^{-1}(K)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\psi^{-1}(K)$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M_1. □

Sebelum ke pembahasan sifat selanjutnya, diperhatikan kembali bahwa menurut [13], suatu homomorfisma (R,S)-modul $\psi: M \to M/K$ dengan definisi $\psi(m) = m + K$, untuk setiap $m \in M$ merupakan suatu epimorfisma (R,S)-modul dengan $Ker(\psi) = K$. Selanjutnya, sifat berikut ini menjelaskan syarat perlu suatu (R,S)-submodul faktor membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan dengan melibatkan sifat homomorfisma (R,S)-modul.

Akibat 1 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, serta (R,S)-submodul N di M.*

(a). Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M dan K merupakan (R,S)-submodul di M yang termuat di P, maka P/K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M/K.

(b). Jika K' merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M/N, maka $K' = K/N$ untuk suatu (R,S)-submodul prima-α gabungan K di M.

Bukti: (a) Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M dan K merupakan (R,S)-submodul di M yang termuat di P. Dibentuk homomorfisma natural (R,S)-modul $\psi: M \to {}^{M}/_{K}$ dengan definisi $\psi(m) = m + K$, untuk setiap $m \in M$. Merujuk [13], diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul dengan $Ker(\psi) = K$. Berdasarkan Proposisi 2a), maka diperoleh bahwa $\psi(P) = {}^{P}/_{K}$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di ${}^{M}/_{K}$. (b) Diketahui K' merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di ${}^{M}/_{N}$. Dibentuk homomorfisma natural (R,S)-modul $\psi: M \to {}^{M}/_{N}$ dengan definisi $\psi(m) = m + N$, untuk setiap $m \in M$. Berdasarkan Proposisi 2b), maka diperoleh bahwa $\psi^{-1}(K')$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Selanjutnya, berdasarkan [13] diketahui bahwa ψ merupakan epimorfisma (R,S)-modul. Akibatnya, $\psi^{-1}(K') = K$ dan untuk (R,S)-submodul K' di ${}^{M}/_{N}$ terdapat (R,S)-submodul K di M sedemikian sehingga memenuhi $K' = {}^{K}/_{N}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $K' = {}^{K}/_{N}$ untuk suatu (R,S)-submodul prima-α gabungan K di M. □

Pada teori modul, suatu submodul sejati X di M disebut submodul maksimal apabila tidak terdapat subodul sejati lain di M yang memuat X. Berdasarkan definisi tersebut, berikut disajikan definisi (R,S)-submodul maksimal.

Definisi 1 *Diberikan (R,S)-modul M. Suatu (R,S)-submodul sejati N di M disebut (R,S)-submodul maksimal di M apabila tidak terdapat (R,S)-submodul sejati lain di M yang memuat N.*

Seperti halnya pada modul, ternyata setiap (R,S)-submodul maksimal juga merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan.

Proposisi 3 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Setiap (R,S)-submodul maksimal di M merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M.*

Bukti: Diambil K yaitu (R,S)-submodul maksimal di M. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq K$ tetapi $N + N \nsubseteq K$. Karena $N + N \nsubseteq K$, maka diperoleh $N \nsubseteq K$. Karena K merupakan (R,S)-submodul maksimal di M maka $M = K + N$. Dari sini diperoleh $(I+I)MS = (I+I)(K+N)S = (I+I)KS + (I+I)NS \subseteq K$. Dengan demikian, diperoleh $I + I \subseteq (K:_R M)$. Jadi, terbukti bahwa K merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Berikut diberikan sifat selanjutnya yang menjelaskan bahwa irisan dari suatu (R,S)-submodul dengan (R,S)-submodul prima-α gabungan membentuk (R,S)-submoduk prima-α gabungan.

Proposisi 4 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R,S)-submodul N di M. Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka $N \cap P$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di N.*

Bukti: Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul L di N dengan $I\beta(L)S \subseteq N \cap P$. Dari sini diperoleh bahwa $I\beta(L)S \subseteq P$. Karena L merupakan (R,S)-submodul di N, maka K juga merupakan (R,S)-submodul di M. Akibatnya, karena P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka dari $I\beta(L)S \subseteq P$ diperoleh $I \subseteq \alpha\big((P:_R M)\big)$ atau $L \subseteq \alpha(P)$. Dari sini diperoleh $\beta(I) \subseteq (P:_R M)$ atau $\beta(L) \subseteq P$. Dengan kata lain, $\beta(I)MS \subseteq P$ atau

$\beta(L) \subseteq P$. Karena N merupakan (R,S)-submodul di M, maka diperoleh $\beta(I)NS \subseteq \beta(I)MS \subseteq P$ dan $\beta(I)NS \subseteq N$. Akibatnya, diperoleh $\beta(I)NS \subseteq N \cap P$, sehingga $I \subseteq \alpha\big((N \cap P :_R N)\big)$. Selanjutnya, karena L merupakan (R,S)-submodul di N, maka diperoleh $\beta(L) \subseteq N$. Akibatnya, diperoleh $\beta(L) \subseteq N \cap P$, sehingga $L \subseteq \alpha(N \cap P)$. Dengan demikian, dari $I\beta(L)S \subseteq N \cap P$ berakibat $I \subseteq \alpha\big((N \cap P :_R N)\big)$ atau $L \subseteq \alpha(N \cap P)$. Jadi terbukti bahwa $N \cap P$ merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di N. □

Berikut diberikan syarat cukup himpunan $(P :_R M)$ membentuk ideal prima di R untuk suatu (R,S)-submodul sejati P di M.

Proposisi 5 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R,S)-submodul sejati P di M. Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M maka $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R.*

Bukti: Diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil sebarang ideal I dan J di R dengan $IJ \subseteq (P :_R M)$ tetapi $I \nsubseteq (P :_R M)$. Dari $IJ \subseteq (P :_R M)$ diperoleh $IJMS \subseteq P$. Karena $S^2 = S$, maka diperoleh $I(JMS)S \subseteq P$, sehingga diperoleh $I(JMS + JMS)S \subseteq P$. Karena P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M maka diperoleh $JMS + JMS \subseteq P$. Dengan demikian, diperoleh $JMS \subseteq P$, sehingga terbukti $J \subseteq (P :_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(P :_R M)$ merupakan ideal prima di R. □

Dengan menggunakan Proposisi 5, berikut disajikan syarat cukup himpunan $(0 :_R M)$ membentuk ideal prima di R.

Proposisi 6 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika M merupakan (R,S)-modul prima-α gabungan maka $(0 :_R M)$ merupakan ideal prima di R.*

Sebelum ke pembahasan sifat selanjutnya, berikut diberikan definisi dari (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal.

Definisi 2 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati X di M disebut (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal apabila X minimal di dalam himpunan semua (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, yaitu tidak terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan lain di M yang termuat di dalam X.*

Berikut diberikan suatu sifat yang menjelaskan syarat perlu suatu (R,S)-submodul membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan.

Proposisi 7 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Jika P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka P memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal di M.*

Bukti: Misalkan dibentuk himpunan $\mathfrak{I}$ yaitu himpunan semua (R,S)-submodul prima-α gabungan di M yang termuat di dalam P. Jelas bahwa $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ karena $P \in \mathfrak{I}$. Dengan menggunakan Lemma Zorn alan dibuktikan bahwa $\mathfrak{I}$ memiliki elemen minimal. Ekuivalen dengan menunjukkan bahwa setiap rantai tak kosong di $\mathfrak{I}$ memiliki batas bawah di $\mathfrak{I}$. Diambil sebarang rantai tak kosong $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{I}$. Dibentuk himpunan $Q = \bigcap_{K \in \mathcal{H}} K$, maka jelas bahwa Q merupakan (R,S)-submodul di M dan $Q \subseteq P$. Akan dibuktikan bahwa Q merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Diambil ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I(N + N)S \subseteq Q$ tetapi $N + N \nsubseteq Q$. Akan dibuktikan bahwa $I + I \subseteq (Q :_R M)$. Karena $N +$

$N \nsubseteq Q$, maka $N \nsubseteq Q$. Diambil sebarang $n \in N \setminus Q$, maka terdapat $K' \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga $n \notin K'$. Karena K' merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka dari $I(N+N)S \subseteq Q \subseteq K'$ bearkibat $(I+I)MS \subseteq K'$, atau ditulis $I+I \subseteq (K' :_R M)$. Selanjutnya diambil $L \in \mathcal{H}$. Karena $\mathcal{H}$ merupakan rantai di $\mathfrak{I}$, maka berlaku $K' \subseteq L$ atau $L \subseteq K'$. Jika $K' \subseteq L$, maka $(I+I)MS \subseteq K' \subseteq L$, Jika $L \subseteq K'$ maka $n \notin L$. Karena L merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M, maka dari $I(N+N)S \subseteq Q \subseteq L$ berakibat $(I+I)MS \subseteq L$ atau ditulis $I+I \subseteq (L :_R M)$. Jadi, diperoleh $(I+I)MS \subseteq L$ untuk setiap $L \in \mathcal{H}$. Akibatnya, diperoleh $(I+I)MS \subseteq Q$ atau dengan kata lain $I+I \subseteq (Q :_R M)$. Dengan demikian, terbukti bahwa Q merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. Karena $Q \subseteq P$, maka $Q \in \mathfrak{I}$ dan Q merupakan batas bawah untuk $\mathcal{H}$. Jadi terbukti bahwa setiap rantai tak kosong di $\mathfrak{I}$ memiliki batas bawah di $\mathfrak{I}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma Zorn maka terdapat (R,S)-submodul prima-α gabungan $P^* \in \mathfrak{I}$ yang minimal diantara semua (R,S)-submodul prima-α gabungan di $\mathfrak{I}$. Dengan demikian, terbukti bahwa (R,S)-submodul prima-α gabungan P memuat (R,S)-submodul prima-α gabungan minimal P^* di M. □

Sebelum ke pembahasan sifat selanjutnya, berikut diberikan suatu proposisi tentang himpunan annihilator dari suatu (R,S)-modul faktor.

Proposisi 8 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R,S)-submodul P di M. Jika K/P merupakan (R,S)-submodul di M/P, maka berlaku $(P :_R M) \subseteq (P :_R K)$.*

Bukti: Diambil sebarang $a \in (P :_R M)$, maka $aMS \subseteq P$. Karena K/P merupakan (R,S)-submodul di M/P, maka K merupakan (R,S)-submodul di M. Akibatnya, diperoleh $aKS \subseteq aMS \subseteq P$. Dengan demikian, terbukti bahwa $a \in (P :_R K)$. Jadi, terbukti bahwa $(P :_R M) \subseteq (P :_R K)$. □

Berikut diberikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul sejati X membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan.

Proposisi 9 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Suatu (R,S)-submodul sejati X di M merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M jika dan hanya jika untuk setiap (R,S)-submodul tak nol K/X di M/X memenuhi sifat $(X :_R K) = (X :_R M)$.*

Bukti: $(\Rightarrow)$. Diambil sebarang (R,S)-submodul tak nol K/X di M/X, maka jelas bahwa $(X :_R M) \subseteq (X :_R K)$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \in (X :_R K)$, maka diperoleh $aKS \subseteq X$. Karena $S^2 = S$ dan $a \in RaS$ untuk setiap $a \in M$, maka diperoleh $(aR)KS = a(RKS)S = aKS \subseteq X$. Dari sini diperoleh $(aR)(K+K)S \subseteq X$. Karena X merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M maka diperoleh $K+K \subseteq X$ atau $aR + aR \subseteq (X :_R M)$. Karena K/X merupakan (R,S)-submodul tak nol, maka $K \neq X$, sehingga hanya diperoleh $aR + aR \subseteq (X :_R M)$. Akibatnya, diperoleh $aRMS + aRMS \subseteq X$. Karena sifat $a \in RaS$ untuk setiap $a \in M$, maka diperoleh $aMS + aMS \subseteq X$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $a + a \in (X :_R M)$ sehingga $a \in (X :_R M)$. Jadi diperoh $(X :_R K) \subseteq (X :_R M)$ sehingga terbukti bahwa $(X :_R K) = (X :_R M)$.

$(\Leftarrow)$. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq X$ tetapi $N + N \nsubseteq X$. Karena $N + N \nsubseteq X$ maka diperoleh $N \nsubseteq X$, sehingga $(N+X)/X$ merupakan (R,S)-submodul tak nol di M/X. Menurut hipotesis, maka diperoleh $(X :_R N + X) = (X :_R M)$. Selanjutnya, dari $I(N+N)S \subseteq X$ diperoleh $INS \subseteq X$. Dengan demikian, diperoleh $I \subseteq (X :_R N + X)$. Karena $(X :_R N + X) = (X :_R M)$ maka diperoleh $I \subseteq (X :_R M)$ sehingga

JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 2 (NOV 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

diperoleh $I+I \subseteq (X:_R M)$. Jadi terbukti bahwa X merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

Dengan menggunakan Proposisi 9, berikut disajikan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-modul membentuk (R,S)-modul prima-α gabungan.

Proposisi 10 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$. Modul M merupakan (R,S)-modul prima-α gabungan jika dan hanya jika untuk setiap (R,S)-submodul tak nol K di M memenuhi $(0:_R K) = (0:_R M)$.*

Berikut disajikan suatu sifat yang merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu (R,S)-submodul faktor membentuk (R,S)-submodul prima-α gabungan. Sifat ini merupakan sifat terakhir dari (R,S)-submodul prima-α gabungan yang disajikan dalam artikel ini.

Proposisi 11 *Diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$, untuk setiap $a \in M$ memenuhi $a \in RaS$, dan (R,S)-submodul P dan A di M dengan $A \subset P$. Submodul P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M jika dan hanya jika P/A merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M/A.*

Bukti: $(\Rightarrow)$. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N/A di M/A dengan $I(N/A + N/A)S \subseteq P/A$. Dari sini diperoleh $(INS)/A \subseteq P/A$, sehingga $INS \subseteq P$. Akibatnya, diperoleh $I(N+N)S \subseteq P$. Karena diketahui P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M maka diperoleh $N+N \subseteq P$ atau $I+I \subseteq (P:_R M)$. Dari sini diperoleh $N \subseteq P$ atau $I \subseteq (P:_R M)$ sehingga diperoleh $N/A \subseteq P/A$ atau $(IMS + A)/A \subseteq P/A$. Karena $(IMS+A)/A = I(M/A)S \subseteq P/A$, maka diperoleh $(I+I)(M/A)S \subseteq P/A$ atau dengan kata lain $I + I \subseteq (P/A:_R M/A)$. Karena $N/A \subseteq P/A$ maka diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$. Dengan demikian diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$ atau $I + I \subseteq (P/A:_R M/A)$. Jadi, terbukti bahwa P/A merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M/A.

$(\Leftarrow)$. Diambil sebarang ideal I di R dan (R,S)-submodul N di M dengan $I(N+N)S \subseteq P$. Dari sini diperoleh $(I(N+N)S + A) \subseteq P/A$, sehingga $I\big((N+N+A)/A\big)S \subseteq P/A$. Karena P/A merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M/A maka diperoleh $(N+N+A)/A \subseteq P/A$ atau $I+I \subseteq (P/A:_R M/A)$. Dengan kata lain, diperoleh $N/A + N/A \subseteq P/A$ atau $(I+I)(M/A)S \subseteq P/A$. Hal ini ekuivalen dengan $N + N \subseteq P$ atau $(I+I)MS \subseteq P$, sehingga diperoleh $N+N \subseteq P$ atau $I + I \subseteq (P:_R M)$. Jadi, terbukti bahwa P merupakan (R,S)-submodul prima-α gabungan di M. □

IV. KESIMPULAN

Seiring perkembangan suatu ring menjadi modul serta perkembangan modul menjadi (R,S)-modul, definisi keprimaan di dalamnya juga mengalami perkembangan. Para peneliti telah mendefinisikan beberapa pendefinisian keprimaan di dalam (R,S)-modul, diantaranya adalah (R,S)-submodul prima gabungan dan (R,S)-submodul prima penuh. Adapun sifat-sifat terkait berbagai pendefinisian keprimaan di dalam (R,S)-modul ini mengacu pada sifat-sifat submodul prima pada suatu modul. Di sisi lain, definisi submodul prima pada modul juga telah mengalami perkembangan. Para peneliti sebelumnya telah mendefinisikan perumuman dari submodul prima, diantaranya adalah submodul semiprima, submodul endoprima, submodul koprima, dan submodul prima lemah. Namun, beberapa perumuman dari submodul prima tersebut hanya fokus pada perkalian skalar di dalam modul. Submodul prima-α merupakan salah satu generalisasi dari submodul prima yang melibatkan semua operasi dari struktur modulnya, tidak hanya operasi perkalian skalarnya saja. Pada artikel ini, definisi submodul prima-α telah dibawa ke dalam struktur (R,S)-modul, yang selanjutnya disebut dengan (R,S)-submodul prima-α gabungan. Di samping itu, disajikan pula beberapa sifat dari (R,S)-submodul prima-α gabungan yang merupakan generalisasi dari sifat keprimaan di dalam struktur modul dengan menambahkan beberapa syarat tertentu. Lebih lanjut, hasil dari penelitian terkait (R,S)-submodul prima-α gabungan dapat digunakan sebagai referensi dalam penelitian terkait (R,S)-submodul prima-α gabungan lemah dan radikal prima-α gabungan beserta sifat-sifatnya.

REFERENSI

[1] J. Dauns, “Prime Modules,” *J. fur die reine und Angew. Math.*, vol. 298, pp. 156–181, 1978.
[2] A. Haghany and M. R. Vedadi, “Endoprime Modules,” *Acta Math. Hungar*, vol. 106, no. 1–2, pp. 89–99, 2005.
[3] I. E. Wijayanti, “Endo-prime Submodules in Endo-multiplication Module,” *Int. Math. Forum*, vol. 9, no. 27, pp. 1321–1332, 2014.
[4] I. E. Wijayanti and R. Wisbauer, “Coprime Modules and Comodules,” *Commun. Algebr.*, vol. 37, no. 4, 2009.
[5] J. Y. Abuhlail, “Zariski Topologies for Coprime and Second Submodules,” *Algebr. Colloq.*, 2011.
[6] A. Azizi, “Weakly Prime Submodules and Prime Modules,” *Glas. Math. J.*, no. 48, pp. 343–346, 2006.
[7] A. Azizi, “On Prime and Weakly Prime Submodules,” *Vietnam J. Math.*, vol. 36, no. 3, pp. 315–325, 2008.
[8] A. K. Jabbar, “A Generalization of Prime and Weakly Prime Submodules,” *Pure Math. Sci.*, vol. 2, no. 1, pp. 1–11, 2013.
[9] T. Khumprapussorn, “On α-Prime and Weakly α-Prime Submodules,” *Eur. J. Pure Appl. Math.*, vol. 11, no. 3, pp. 293–306, 2018.
[10] W. A. Adkins, *Algebra “An Approach via Module Theory.”* USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1992.
[11] R. Wisbauer, *Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras*. Essex: Addison Wesley Longman Ltd., 1996.
[12] T. Khumprapussorn, S. Pianskool, and M. Hall, “(R , S) -Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules,” vol. 7, no. 33, pp. 1631–1643, 2012.
[13] D. A. Yuwaningsih, I. E. Wijayanti, and P. W. Prasetyo, “On (R, S)-Module Homomorphisms,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1188, no. 1, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1188/1/012114.