JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 4 NO. 1 (JUN 2021)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

Topologi di Ruang Metrik Pseudo-b_s (Topology in b_s-Pseudo Metric Spaces)

Zahra Aulia Emeralda[1*], Christiana Rini Indrati[2]

[1,2] *Universitas Gadjah Mada*
Email: [1]zahra.aulia.e@mail.ugm.ac.id, [2]rinii@ugm.ac.id
*Penulis Korespondensi

Abstract. In this paper, we discuss about some properties of b_s-pseudo metric and the topology in b_s-pseudo metric space such as b_s-convergence of a sequence, b_s-Cauchy sequence, completeness of a b_s-pseudo metric space, and b_s-closed set.
Keywords: b_s-pseudo metric, b_s-convergence of a sequence, b_s-Cauchy sequence, completeness of a b_s-pseudo metric space, b_s-closed set.
Abstrak. Dalam tulisan ini dibahas mengenai beberapa sifat metrik pseudo-b_s dan topologi dalam ruang metrik pseudo-b_s di antaranya kekonvergenan-b_s barisan, barisan Cauchy-b_s, ruang metrik pseudo-b_s lengkap, serta himpunan tertutup-b_s.
Kata Kunci: metrik pseudo-b_s, kekonvergenan-b_s barisan, barisan Cauchy-b_s, ruang metrik pseudo-b_s lengkap, himpunan tertutup-b_s.

I. PENDAHULUAN

Fungsi $d : X \times X \to [0, \infty)$, dengan $X \neq \emptyset$, merupakan metrik jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku (i) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, dan (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ [7]. Perlemahan salah satu aksioma metrik tersebut mendefinisikan metrik-b dan juga metrik pseudo. Fungsi d disebut metrik-b jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku (i) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, dan (iii) $d(x, z) \leq s[d(x, y)+d(y, z)]$ [4]. Sedangkan d disebut metrik pseudo jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku (i) $d(x, x) = 0$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, dan (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Selanjutnya, perlemahan salah satu aksioma dari metrik-b atau metrik pseudo mendefinisikan metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$.

Konsep metrik pseudo-b_s diperkenalkan oleh Ali, dkk [2]. Untuk bilangan $s \geq 1$, keluarga $\mathcal{F} = \{d_k : k \in \mathbb{N}\}$, yaitu keluarga metrik pseudo-b_s pada suatu himpunan tak kosong X, beserta topologi di ruang metrik pseudo-b_s (X, d_k) untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ digunakan untuk mendefinisikan struktur baru pada himpunan X yang disebut ruang gauge-b_s. Dalam papernya tersebut, Ali, dkk. menyelidiki eksistensi titik tetap untuk fungsi bernilai himpunan di ruang gauge-b_s [2]. Pada tahun 2017, Ali, dkk. memperbaiki tulisannya dengan menambahkan satu teorema yang menunjukkan eksistensi titik tetap dengan syarat fungsi $f_k : X \to \mathbb{R}$, dengan definisi $f_k(x) = d_k(x, T(x))$ untuk setiap $x \in X$ dan T merupakan fungsi bernilai himpunan dari X ke keluarga semua himpunan bagian tertutup-$\mathcal{F}$ dari X yang tidak kosong, merupakan fungsi semikontinu bawah untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ [3]. Selain itu, dalam tulisan-tulisan lainnya yang merujuk ke [2], yaitu [1, 5, 6, 8, 9, 10], dibahas mengenai eksistensi titik tetap di ekstensi ruang metrik-b dengan metode yang berbeda-beda. Nosheen Zikria, dkk.[11] membahas mengenai eksistensi titik tetap menggunakan kontraksi-G di perluasan ruang gauge-b. Pembentukan perluasan ruang gauge-b tersebut menggunakan konsep perluasan dari metrik pseudo-b_s. Di antara tulisan-tulisan tersebut tidak ada yang secara khusus membahas mengenai sifat-sifat topologi di ruang metrik pseudo-b_s. Oleh karena itu, dari penelitian yang dilakukan oleh Ali, dkk., penulis termotivasi untuk menyelidiki lebih rinci mengenai beberapa sifat topologi pada ruang metrik pseudo-b_s. Dalam tulisan ini, untuk $s \geq 1$, pertama-tama diberikan beberapa contoh ruang metrik pseudo-b_s dan juga hubungan metrik pseudo-b_s dengan metrik, metrik pseudo, dan metrik-b. Selanjutnya, diberikan contoh barisan di ruang metrik pseudo-b_s, contoh dari barisan konvergen-b_s, barisan Cauchy-b_s dan hubungan antara konvergen-b_s dan Cauchy-b_s beserta bukti dan contohnya. Selanjutnya, konsep ruang metrik pseudo-b_s lengkap termotivasi dari contoh barisan Cauchy-b_s yang tidak konvergen-b_s. Ruang metrik pseudo-b_s lengkap merupakan ruang metrik pseudo-b_s dengan sifat setiap barisan Cauchy-b_s merupakan barisan konvergen-b_s. Dalam tulisan ini diberikan contoh ruang metrik pseudo-b_s lengkap. Kemudian, barisan di ruang metrik pseudo-b_s digunakkan untuk mendefinisikan himpunan tertutup-b_s. Penulis juga memberikan contoh himpunan tertutup-b_s, sifat irisan dan gabungan dua himpunan tertutup-b_s, sifat irisan sebarang himpunan tertutup-b_s, dan pada bagian akhir tulisan ini diberikan sifat gabungan sebarang himpunan tertutup-b_s.

Berdasarkan penjabaran di atas, diberikan definisi metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ sebagai berikut.

Definisi 1 *[3, 2] Diberikan himpunan tak kosong X, $s \geq 1$, dan fungsi $d : X \times X \to [0, \infty)$. Fungsi d disebut metrik pseudo-b_s jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi*

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, *dan*
3. $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Selanjutnya, pasangan (X, d) disebut ruang metrik pseudo-b_s.

Agar dapat memahami apa itu ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$, diperhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1 Berikut ini adalah contoh-contoh dari metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$.

1. Diberikan sebarang himpunan tak kosong X. Metrik diskrit p, yaitu

$$p(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

dengan $x, y \in X$ merupakan metrik pseudo-b_1.

2. Fungsi $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dengan

$$m(x, y) = (x - y)^2$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, merupakan metrik pseudo-b_2.

Bukti. (a) Diambil sebarang $x \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$m(x, x) = (x - x)^2 = 0.$$

(b) Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$m(x, y) = (x - y)^2 = (y - x)^2 = m(y, x).$$

(c) Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned} m(x, z) &= (x - z)^2 \\ &= (x - y + y - z)^2 \\ &\leq (|x - y| + |y - z|)^2 \\ &= (x - y)^2 + 2|x - y||y - z| + (y - z)^2 \\ &\leq (x - y)^2 + ((x - y)^2 + (y - z)^2) + (y - z)^2 \\ &= 2[(x - y)^2 + (y - z)^2] \\ &= 2[m(x, y) + m(y, z)]. \end{aligned}$$

□

3. Diberikan sebarang himpunan tak kosong X. Fungsi d_* dengan definisi $d_*(x, y) = 0$ untuk setiap $x, y \in X$ merupakan metrik pseudo-b_1.

4. [3] Diberikan himpunan $X = C([0, \infty))$, yaitu himpunan semua fungsi kontinu dari $[0, \infty)$ ke $\mathbb{R}$, dan $d(x, y) = \max_{t\in[0,1]}(x(t) - y(t))^2$, untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi d merupakan metrik pseudo-b_2.

Bukti. (a) Diambil sebarang $x \in X$, diperoleh

$$d(x, x) = \max_{t\in[0,1]}(x(t) - x(t))^2 = 0$$

(b) Diambil sebarang $x, y \in X$, diperoleh

$$d(x, y) = \max_{t\in[0,1]}(x(t) - y(t))^2 = \max_{t\in[0,1]}(y(t) - x(t))^2 = d(y, x)$$

(c) Diambil sebarang $x, y, z \in X$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max_{t\in[0,1]}(x(t) - z(t))^2 = \max_{t\in[0,1]}(x(t) - y(t) + y(t) - z(t))^2 \\ &\leq \max_{t\in[0,1]}(|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|)^2 \\ &= \max_{t\in[0,1]}\left[(x(t) - y(t))^2 + 2|x(t) - y(t)||y(t) - z(t)| + (y(t) - z(t))^2\right] \\ &\leq \max_{t\in[0,1]}[(x(t) - y(t))^2 + ((x(t) - y(t))^2 + (y(t) - z(t))^2) \\ &\quad + (y(t) - z(t))^2] \\ &= \max_{t\in[0,1]} 2[(x(t) - y(t))^2 + (y(t) - z(t))^2] \\ &= 2[\max_{t\in[0,1]}(x - y)^2 + \max_{t\in[0,1]}(y - z)^2] \\ &= 2[d(x, y) + d(y, z)]. \end{aligned}$$

$\square$

Diperhatikan bahwa pada Contoh 1 di atas, fungsi p merupakan metrik, fungsi m merupakan metrik-b, dan fungsi d_* merupakan metrik pseudo. Ketiganya merupakan metrik pseudo-b_s dengan s tertentu. Dengan demikian, muncul pertanyaan mengenai hubungan metrik, metrik-b, dan metrik pseudo dengan metrik pseudo-b_s. Hubungan tersebut diberikan dalam Teorema 1 berikut ini.

Teorema 1 *Diberikan himpunan tak kosong X dan fungsi $d : X \times X \to [0, \infty)$.*

1. *Jika d merupakan metrik, maka d merupakan metrik pseudo-b_1.*
2. *Jika d merupakan metrik-b dengan $s \geq 1$, maka d merupakan metrik pseudo-b_s.*
3. *Jika d merupakan metrik pseudo, maka d merupakan metrik pseudo-b_1.*

Bukti. Diketahui X tidak kosong dan $d : X \times X \to [0, \infty)$ fungsi.

1. Diketahui d metrik, diperoleh aksioma pertama dan kedua metrik pseudo-b_s terpenuhi. Diambil sebarang $x, y, z \in X$, karena d metrik, diperoleh
$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &= 1[d(x,y) + d(y,z)] \\ &= s[d(x,y) + d(y,z)]. \end{aligned}$$
2. Diketahui d metrik-b, diperoleh aksioma pertama dan kedua metrik pseudo-b_s terpenuhi. Karena d metrik-b, berarti terdapat $s \geq 1$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku
$$d(x,z) \leq s[d(x,y) + d(y,z)].$$
3. Diketahui d metrik pseudo, diperoleh aksioma pertama dan kedua metrik pseudo-b_s terpenuhi. Diambil sebarang $x, y, z \in X$, diperoleh
$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &= 1[d(x,y) + d(y,z)] \\ &= s[d(x,y) + d(y,z)]. \end{aligned}$$

$\square$

Berdasarkan sifat tersebut, setiap metrik, metrik-b, dan metrik pseudo merupakan metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ tertentu. Namun, sebaliknya belum tentu berlaku. Diperhatikan kembali bahwa pada Contoh 1, fungsi d bukan merupakan metrik, metrik-b, maupun metrik pseudo.

Contoh 2 [3] Diberikan himpunan $X = C([0, \infty))$, yaitu himpunan semua fungsi kontinu dari $[0, \infty)$ ke $\mathbb{R}$ dan $d(x, y) = \max_{t \in [0,1]}(x(t) - y(t))^2$, untuk setiap $x, y \in X$.

1. Fungsi d bukan merupakan metrik pada X karena terdapat $x, y, z \in X$ dengan $x(t) = 0$, $y(t) = 1$, dan $z(t) = 2$ untuk setiap $t \in [0, \infty)$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \max_{t\in[0.1]} (0-2)^2 \\ &= 4 \\ &\geq 1+1 \\ &= \max_{t\in[0.1]} (0-1)^2 + \max_{t\in[0.1]} (1-2)^2 \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

2. Fungsi d bukan merupakan metrik pseudo pada X karena terdapat $x, y, z \in X$ dengan

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & \text{, untuk } t > 1. \end{cases}$$

$y(t) = 3$, dan $z(t) = -3$ untuk setiap $t \in [0, \infty)$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} d(y,z) &= \max_{t\in[0,1]} (y(t) - z(t))^2 \\ &= 36 \\ &> 18 \\ &= 9+9 \\ &= \max_{t\in[0,1]} (y(t) - x(t)) + \max_{t\in[0,1]} (x(t) - z(t)) \\ &= d(y,x) + d(x,z). \end{aligned}$$

3. Fungsi d juga bukan merupakan metrik-b pada X karena terdapat $x, y \in X$ dengan

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & \text{, untuk } t > 1 \end{cases}$$

dan

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } 0 \leq t \leq 1 \\ 2t-2 & \text{, untuk } t > 1. \end{cases}$$

Diperoleh $x \neq y$ karena ada $t = 2$ dengan $x(2) = 1 \neq 2 = y(2)$, tetapi

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max_{t\in[0.1]} (x(t) - y(t))^2 \\ &= \max(0-0)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Untuk sebarang ruang metrik pseudo-b_s (X, d), setiap himpunan bagian $A \subseteq X$ yang dilengkapi dengan metrik pseudo-b_s merupakan ruang metrik pseudo-b_s. Hal ini dikarenakan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in A \subseteq X$ berlaku

1. $d(a_1, a_1) = 0$,
2. $d(a_1, a_2) = d(a_2, a_1)$, dan
3. $d(a_1, a_3) \leq s[d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3)]$.

Selanjutnya, untuk $r \geq s \geq 1$, setiap metrik pseudo-b_s pada suatu himpunan tak kosong X merupakan metrik pseudo-b_r pada X. Karena untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)] \leq r[d(x, y) + d(y, z)]$.

Secara umum, metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ bukan merupakan fungsi kontinu. Berikut ini diberikan contohnya.

Contoh 3 Diberikan $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ dan fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & , untuk\ m = n \\ \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right| & , untuk\ m\ dan\ n\ genap\ atau\ m\ genap\ dan\ n = \infty\ atau \\ & \quad m = \infty\ dan\ n\ genap \\ 8 & , untuk\ m\ dan\ n\ ganjil\ atau\ m\ ganjil\ dan\ n = \infty\ atau \\ & \quad m = \infty\ dan\ n\ ganjil \\ 5 & , lainnya. \end{cases}$$

Diperoleh (X, d) merupakan ruang metrik pseudo-b_3 tetapi fungsi d tidak kontinu di $(\infty, 1) \in X \times X$. Didefinisikan fungsi $f : X \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = d(2x, 1)$ untuk setiap $x \in X$. Dipilih $\varepsilon_0 = 2$, diambil sebarang $N > 0$. Berdasarkan sifat Archimedean, terdapat $m_N \in \mathbb{N}$ sehingga $N \leq m_N$. Diperoleh

$$\begin{aligned} |f(2m_N) - f(\infty)| &= |d(2m_N, 1) - d(\infty, 1)| \\ &= |5 - 8| = 3 > \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Jadi, f tidak kontinu di ∞. Akibatnya, d tidak kontinu di $(\infty, 1)$.

II. TOPOLOGI DI RUANG METRIK PSEUDO-b_s

Pada bagian ini akan dibahas mengenai kekonvergenan-b_s barisan, barisan Cauchy-b_s, ruang metrik pseudo-b_s lengkap, dan himpunan tertutup-b_s.

Definisi 1 *Diberikan $s \geq 1$ dan ruang metrik pseudo-b_s (X, d). Barisan di ruang metrik pseudo-b_s adalah fungsi dari $\mathbb{N}$ ke X.*

Dengan demikian, jika diberikan ruang metrik pseudo-b_s (X, d) dengan $s \geq 1$, fungsi $f : \mathbb{N} \to X$ dengan $f(n) = x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan di X. Barisan tersebut dapat dituliskan sebagai (x_n), $\{x_n\}$, atau $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Berikut ini diberikan contoh dari barisan di ruang metrik pseudo-b_s.

Contoh 1 Diberikan himpunan $X = C([0, \infty))$, yaitu himpunan semua fungsi kontinu dari $[0, \infty)$ ke $\mathbb{R}$ dan $d(x, y) = \max_{t \in [0,1]}(x(t) - y(t))^2$, untuk setiap $x, y \in X$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

didefinisikan x_n dengan

$$x_n(t) = \frac{t}{n}$$

untuk setiap $t \in [0, \infty)$. Diperoleh $\{x_n\}$ merupakan barisan di X.

Berikut ini adalah definisi kekonvergenan-b_s suatu barisan di ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$.

Definisi 2 *Diberikan $s \geq 1$, ruang metrik pseudo-b_s (X, d), dan $\{x_n\}$. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen-b_s ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku*

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Selanjutnya, x disebut limit-b_s barisan $\{x_n\}$ dan dinotasikan dengan $x_n \to^{b_s} x$.

Untuk selanjutnya, barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik pseudo-b_s (X, d), dengan $s \geq 1$, dikatakan barisan konvergen-b_s jika terdapat $x \in X$ sehingga barisan $\{x_n\}$ konvergen-b_s ke x. Berikut ini diberikan contoh barisan konvergen-b_2.

Contoh 2 Diperhatikan kembali barisan pada Contoh 1. Barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen-b_2 ke fungsi $\theta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dengan $\theta(t) = 0$ untuk setiap $t \in [0, \infty)$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedes dapat ditemukan $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned}
d(x_n, \theta) &= \max_{t \in [0,1]} (x_n(t) - \theta(t))^2 \\
&= \max_{t \in [0,1]} \left(\frac{t}{n} - 0 \right)^2 \\
&= \max_{t \in [0,1]} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{n} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{n_0} \right)^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{n_0} \right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Diberikan $s \geq 1$, $\{x_n\}$ barisan di ruang metrik pseudo-b_s (X, d) dan $\{n_k\}$ merupakan barisan di $\mathbb{N}$ dengan sifat

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots .$$

Barisan $\{x_{n_k}\}$ disebut barisan bagian dari $\{x_n\}$.

Lemma 1 *Diberikan $s \geq 1$, ruang metrik pseudo-b_s (X, d), dan barisan $\{x_n\}$. Jika barisan $\{x\}$ konvergen-b_s ke $x \in X$, maka $\{x_{n_k}\}$ konvergen-b_s ke x.*

Tidak seperti dalam ruang metrik, limit-b_s suatu barisan di ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ tidaklah tunggal. Diperhatikan kembali fungsi d_* pada Contoh 1. Sebarang barisan di himpunan X merupakan barisan konvergen-b_1 ke setiap anggota X.

Selain kekonvergenan-b_s barisan pada ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$, perlu juga diketahui definisi serta contoh dari barisan Cauchy-b_s. Definisi barisan Cauchy-b_s dengan $s \geq 1$ diberikan dalam Definisi 3 berikut.

Definisi 3 *Diberikan $s \geq 1$, ruang metrik pseudo-b_s (X, d), dan $\{x_n\}$. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy-b_s jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Untuk lebih memahami apa yang dimaksud denngan barisan Cauchy-b_s di ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3 Diperhatikan kembali barisan pada Contoh 1. Barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy-b_2.

Bukti. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedes dapat ditemukan $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{4}{\varepsilon} < n_0$. Akibatnya, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \max_{t\in[0,1]} (x_m(t) - x_n(t))^2 \\ &= \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{t}{m} - \frac{t}{n}\right)^2 \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} 2\left(\left(\frac{t}{m}\right)^2 + \left(\frac{t}{n}\right)^2\right) \\ &\leq 2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\frac{4}{n_0^2}\right) \leq \left(\frac{4}{n_0}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Dalam ruang metrik, setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy. Sifat tersebut berlaku juga untuk ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ dan diberikan buktinya dalam Teorema 1 berikut.

Teorema 1 *Diberikan $s \geq 1$ dan ruang metrik pseudo-b_s (X, d). Setiap barisan konvergen-b_s merupakan barisan Cauchy-b_s.*

Bukti. Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di X yang konvergen-b_s, katakan ke $x \in X$, dan $\varepsilon > 0$. Karena $\{x_n\}$ konvergenb_s ke x, maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2s}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq s[d(x_m, x) + d(x_n, x)] < s\left[\frac{\varepsilon}{2s} + \frac{\varepsilon}{2s}\right] = \varepsilon.$$

Jadi, $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy-b_s di X. □

Contoh 4 Barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $((0,1), m)$ dengan $m(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in (0.1)$ tetapi barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen di ruang tersebut. Mengingat bahwa setiap ruang metrik merupakan metrik pseudo-b_s, maka Teorema 1 tidak berlaku sebaliknya.

Berdasarkan contoh di atas, dapat didefinisikan kelengkapan suatu ruang metrik pseudo-b_s (X,d) sebagai berikut.

Definisi 4 *Diberikan $s \geq 1$, ruang metrik pseudo-b_s (X,d), dan $\{x_n\}$. Ruang metrik pseudo-b_s (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy-b_s merupakan barisan konvergen-b_s.*

Salah satu contoh ruang metrik pseudo-b_2 lengkap diberikan dalam Contoh 5 berikut ini.

Contoh 5 Diberikan himpunan $A = C([0,1])$, yaitu himpunan semua fungsi kontinu dari $[0,1]$ ke $\mathbb{R}$ dan $d(x,y) = \max_{t\in[0,1]}(x(t) - y(t))^2$, untuk setiap $x, y \in X$. Karena (X,d) dengan $X = C([0,\infty))$ merupakan ruang metrik pseudo-b_2 (lihat kembali Contoh 1), maka (A,d) juga merupakan ruang metrik pseudo-b_2. Diambil sebarang barisan Cauchy-b_2 di A dan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_m, x_n) = \max_{t\in[0,1]}(x_m(t) - x_n(t))^2 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Akibatnya, untuk sebarang $t \in [0,1]$ dan $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x_m(t) - x_n(t)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}. \tag{1}$$

Dengan demikian, $\{x_n(t)\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Karena $\mathbb{R}$ merupakan ruang metrik lengkap, maka $\{x_n(t)\}$ konvergen ke suatu $y_t \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan ketunggalan limit barisan di $\mathbb{R}$, dapat didefinisikan fungsi $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

untuk setiap $t \in [0,1]$.
Diperhatikan kembali pertidaksamaan (1). Dengan mengambil $n \to \infty$, untuk sebarang t dan $m \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq n_0$ diperoleh

$$|x_m(t) - x(t)| = |x_m(t) - \lim_{n\to\infty} x_n(t)| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Akibatnya, berlaku

$$\max_{t\in[0,1]} |x_m(t) - x(t)| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}. \tag{2}$$

Diperoleh barisan fungsi $\{x_n\}$ konvergen seragam ke x. Karena x_n merupakan fungsi kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka x merupakan fungsi kontinu. Lebih lanjut, dari pertidaksamaan (2) diperoleh

$$\max_{t\in[0,1]}(x_m(t) - x(t))^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Jadi, barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen-b_2. Dengan kata lain, (A, d) merupakan ruang metrik pseudo-b_2 lengkap.

Definisi himpunan tertutup-b_s di suatu ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ diberikan dalam Definisi 5 berikut.

Definisi 5 *Diberikan $s \geq 1$ dan ruang metrik pseudo-b_s (X, d). Himpunan $A \subseteq X$ dikatakan tertutup-b_s jika limit-b_s setiap barisan di A yang konvergen-b_s termuat di A.*

Contoh 6 berikut ini merupakan contoh dari himpunan tertutup-b_s di ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$.

Contoh 6 Diberikan himpunan $X = C([0, \infty))$ dan $d(x, y) = \max_{t \in [0,1]}(x(t) - y(t))^2$, untuk setiap $x, y \in X$. Himpunan-himpunan berikut merupakan himpunan tertutup-b_2.

1. Untuk setiap $x \in X$, singleton $\{x\}$ merupakan himpunan tertutup-b_2.
2. $A = \left\{x_n : x_n(t) = \dfrac{t}{n}, n \in \mathbb{N}, t \in [0, \infty)\right\} \cup \{y \in X : y(s) = 0, s \in [0, 1]\}$ merupakan himpunan tertutup-b_2.

Sebarang gabungan dan irisan dua himpunan tertutup merupakan himpunan tertutup di ruang metrik. Sifat tersebut juga berlaku di ruang metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ dan diberikan buktinya dalam Teorema 2 berikut ini.

Teorema 2 *Diberikan $s \geq 1$ dan ruang metrik pseudo-b_s (X, d).*

1. *Jika $A, B \subseteq X$ himpunan tertutup-b_s, maka $A \cup B$ himpunan tertutup-b_s.*
2. *Jika $A, B \subseteq X$ himpunan tertutup-b_s, maka $A \cap B$ himpunan tertutup-b_s.*

Bukti. Diambil sebarang $A, B \subseteq X$ dengan A dan B tertutup-b_s di X.

1. Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di $A \cup B$ yang konvergen-b_s, katakan ke $x \in X$. Karena $A \cup B$ memuat takterhingga banyaknya suku-suku barisan $\{x_n\}$, maka salah satu dari A atau B memuat takterhingga banyaknya suku-suku barisan $\{x_n\}$. Tanpa mengurangi keumuman, dimisalkan A memuat takterhingga banyaknya suku-suku barisan $\{x_n\}$. Akibatnya, terdapat barisan bagian $\{x_{n_k}\}$ yang termuat di A. Berdasarkan Lemma 1, barisan $\{x_{n_k}\}$ konvergen-b_s ke x. Diperoleh $x \in A$, karena A tertutup-b_s. Jadi, $x \in A \cup B$. Dengan kata lain, $A \cup B$ tertutup-b_s.
2. Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di $A \cap B$ yang konvergen-b_s, katakan ke $x \in X$. Karena $\{x_n\}$ barisan di $A \cap B$, maka $\{x_n\}$ barisan di A. Diketahui A tertutup-b_s, barisan $\{x_n\}$ termuat di A, dan $\{x_n\}$ konvergen-b_s ke x, diperoleh $x \in A$. Dengan cara yang sama, diperoleh $x \in B$. Dengan demikian, $x \in A \cap B$. Jadi, diperoleh $A \cap B$ tertutup-b_s.

$\square$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa irisan dari sebarang himpunan tertutup-b_s merupakan himpunan tertutup-b_s.

Teorema 3 *Diberikan $s \geq 1$ dan ruang metrik pseudo-b_s (X, d). Jika $A_i \subseteq X$ himpunan tertutup-b_s untuk setiap $i \in I$, dengan I himpunan indeks, maka $\bigcap_{i \in I} A_i$ himpunan tertutup-b_s.*

Bukti. Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di $\bigcap_{i \in I} A_i$ yang konvergen-b_s, katakan ke $x \in X$. Karena $\{x_n\}$ barisan di $\bigcap_{i \in I} A_i$, maka $\{x_n\}$ barisan di A_i untuk setiap $i \in I$. Diketahui untuk setiap $i \in I$, himpunan A_i tertutup-b_s, barisan $\{x_n\}$ termuat di A_i, dan $\{x_n\}$ konvergen-b_s ke x, diperoleh $x \in A_i$ untuk setiap $i \in I$. Jadi, diperoleh $\bigcap_{i \in I} A_i$ tertutup. $\square$

Telah ditunjukkan bahwa irisan dari sebarang himpunan tertutup-b_s merupakan himpunan tertutup-b_s untuk $s \geq 1$. Namun, untuk gabungan dari sebarang himpunan tertutup-b_s belum tentu merupakan himpunan tertutup-b_s. Berikut ini diberikan contohnya.

Contoh 7 Diberikan himpunan $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan metrik biasa $h(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Karena setiap metrik merupakan metrik pseudo-b_1, maka interval $\left[\frac{1}{k}, 1\right]$ merupakan himpunan tertutup-b_1 untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1\right] = (0, 1].$$

Diambil sebarang $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1\right]$, artinya terdapat $k_x \in \mathbb{N}$ sehingga

$$x \in \left[\frac{1}{k_x}, 1\right] \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{k_x} \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 < x \leq 1,$$

yang artinya $x \in (0, 1]$. Diambil sebarang $y \in (0, 1]$. Untuk $y = 1$, diperoleh

$$y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1\right].$$

Untuk $0 < y < 1$, berdasarkan sifat Archimedean, terdapat $k_y \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $1 < \frac{1}{y} < k_y$. Akibatnya, diperoleh

$$1 < \frac{1}{y} < k_y \Rightarrow \frac{1}{k_y} < y < 1$$

yang artinya $y \in \left[\frac{1}{k_y}, 1\right] \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, 1\right]$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $(0, 1]$ tidak tertutup-b_1. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ didefinisikan $t_m = \frac{1}{m}$. Diambil sebarang $t \in (0, 1]$, dipilih $\varepsilon_0 = \frac{t}{2}$ dan diambil sebarang $m \in \mathbb{N}$. Berdasarkan sifat Archimedean, terdapat $m_1 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $\frac{2}{x} < m_1 \Rightarrow \frac{1}{m_1} < \frac{x}{2}$. Selanjutnya, dipilih $m_2 = m_1 + m \geq m$ diperoleh

$$x - \frac{1}{m_2} > x - \frac{1}{m_1} > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = \varepsilon_0.$$

Jadi, t_m tidak konvergen di $(0,1]$. Dengan kata lain, himpunan $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{k},1\right] = (0,1]$ tidak tertutup-b_1.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan penjabaran pada bagian I, diperoleh metrik, metrik-b, dan metrik pseudo merupakan metrik pseudo-b_s dengan $s \geq 1$ tertentu dan pembuktiannya diberikan dalam Teorema 1. Namun, terdapat contoh metrik pseudo-b_s bukan merupakan metrik, metrik pseudo, maupun metrik-b yang dapat dilihat pada Contoh 2. Selanjutnya, dari bagian II, diperoleh untuk ruang metrik pseudo-b_s (X,d), dengan $s \geq 1$, diperoleh sifat bahwa setiap barisan bagian dari barisan konvergen-b_s merupakan barisan konvergen-b_s dengan limit-b_s barisan yang sama (Lemma 1) dan setiap barisan konvergen-b_s merupakan barisan Cauchy-b_s (Teorema 1) namun tidak berlaku sebaliknya. Selain itu, untuk sebarang dua himpunan tertutup-b_s, irisan dan gabungannya merupakan himpunan tertutup-b_s (Teorema 2). Lebih lanjut, irisan dari sebarang himpunan tertutup-b_s merupakan himpunan tertutup-b_s (Teorema 3), namun gabungan dari tak berhingga banyaknya himpunan tertutup-b_s belum tentu merupakan himpunan tertutup-b_s (Contoh 7).

REFERENSI

[1] Al-Mezel, Saleh, dan Ahmad, Jamshaid, Generalized Fixed-Point Results for Almost (α, $F\sigma$)-Contractions with Applications to Fredholm Integral Inclusions, *Symmetry*, Vol. 11, 1068, 10.3390/sym11091068, 2019.

[2] Ali, M. U., Kamran, T., dan Postolache, M., Fixed point theorems for multivalued G-contractions in Hausdorff b-Gauge spaces, *Journal of Nonlinear Science and Application*, Vol. 8, pp. 847-855, 2015.

[3] Ali, M. U. dan Din, F.U. Discussion on α-contractions and related fixed point theorems in Hausdorff b-Gauge Spaces, *Jordan Journal of Mathematics and Statistics(JJMS)*, Vol. 10, No. 3, pp. 247-263, 2017.

[4] Czerwik, S. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Math Inform Univ Ostrav, Vol. 1, pp. 5–11, 1993.

[5] Mukheimer, Aiman, dkk., New theorems on extended b-metric spaces under new contractions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 24, 10.15388/NA.2019.6.2, 2019.

[6] Nazam, Muhammad, dan Muhammad, Arshad, Common Fixed Point Theorem For Generalized b-Order Rational Contraction With Application, *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 8, 2017.

[7] Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. M. *Real Analysis 4th Edition*, Prentice Hall, Amerika Serikat, 2010.

[8] Sagheer, Dur-e-Shehwar, dan Kamran, Tayyab, (2015). C* C^* -Valued G-contractions and fixed points, *Journal of Inequalities and Applications*, 10.1186/s13660-015-0827-9, 2015.

[9] Shatanawi, Wasfi, Abodayeh, Kamal, dan Mukheimer, Aiman, Some fixed point theorems in extended b-metric spaces, *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, Vol. 80, pp. 71-78, 2018.

[10] Tiammee, Jukrapong, Suantai, Suthep, dan Yeol Je, Cho, Existence theorems of a new set-valued MT-contraction in b-metric spaces endowed with graphs and applications, *Fixed Point Theory*, Vol. 19, pp. 785-800. 10.24193/fpt-ro.2018.2.58, 2018.

[11] Zikria, Nosheen, dkk., Periodic and Fixed Points for Caristi-Type G-Contractions inExtended b-Gauge Spaces, *Hindawi Journal of Function Spaces*, Vol. 2021(1), pp. 1-9, 2021.